

ABRISS

DES

GEOMETRISCHEN KALKÜLS.

NACH DEN WERKEN

DES

PROFESSORS Dr. HERMANN GÜNTHER GRASSMANN

BEARBEITET VON

FERDINAND KRAFT,

PRIVATDOZENT AN DER UNIVERSITÄT ZÜRICH.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1893.

SEINEN HOCHVEREHRTEN LEHRERN

HERRN DR. FRANZ GRASHOF

GEHEIMER RAT, PROFESSOR DER ANGEWANDTEN MECHANIK UND MASCHINENLEHRE
AN DER GROSSHERZOGLICH BADISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN KARLSRUHE

UND

HERRN DR. WILHELM SCHELL

GEHEIMER HOFRAT, PROFESSOR DER THEORETISCHEN MECHANIK UND SYNTHETISCHEN GEOMETRIE
AN DER GROSSHERZOGLICH BADISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN KARLSRUHE

GEWIDMET.

Vorwort.

Hermann Günther Grafsmann, geboren am 15. April 1809, gestorben am 26. September 1877 in Stettin, gab zuerst der gesamten Mathematik ein allgemeines Fundament durch seine im Jahre 1844 erschienene lineale Ausdehnungslehre und durch seine Ausdehnungslehre, welche im Jahre 1862 veröffentlicht wurde.

Unter dem Titel „Hermann Grafsmann“ hat Dr. Viktor Schlegel kurz nach dem Hinscheiden unseres genialen Mathematikers dessen Leben und Wirken beschrieben.

Infolge der eigentümlichen Abfassung beider Werke und in Ermangelung des Ausblickes der praktischen Bedeutung dieser Schöpfung verhinderte die Schwierigkeit ihres Studiums bisher eine volle Wechselwirkung zwischen den Ideen Grafsmanns und der derzeitigen Mathematik. Wohl wurden Versuche unternommen, seine Errungenschaft nutzbar zu machen, jedoch geschah solches aus mancherlei Gründen ohne wesentlichen Erfolg. Der erste Mathematiker, welcher bestrebt war, in einfachem Gewande Grafsmanns Auffassung der Mathematik wieder zu geben, ist Dr. Viktor Schlegel. Derselbe veröffentlichte in den Jahren 1872 und 1875, auf Veranlassung von Clebsch, sein System der Raumlehre und der modernen Algebra nach den Prinzipien der Ausdehnungslehre (Leipzig, B. G. Teubner), sodann hat er wiederholt in Zeitschriften auf die Wichtigkeit der Ausdehnungslehre hingewiesen.

Der Grundrifs der Mechanik von Professor Dr. Lüroth (München, Ackermann, 1881) zeigte den grofsen Nutzen von Grafsmanns Anschauung. In den ersten achtziger Jahren versuchte Dr. R. Mehmke eine Vorlesung über die Ausdehnungslehre am Polytechnikum in Stuttgart. Der verstorbene Gymnasialoberlehrer Dr. Hermann Noth leitete eine Arithmetik der Lage ab (Leipzig, J. A. Barth, 1882). Der Gymnasialprofessor Mahler gab eine Einleitung in die Ausdehnungslehre (Schulprogramm des Gymnasiums in Ulm, 1883—1884). Im Jahre 1885 entwickelte Leopold Schendel die Grundzüge der (höheren)

Algebra nach den Prinzipien der Ausdehnungslehre (Halle a. S., H. W. Schmidt). Dr. Kirchner versuchte die Bewegung unveränderlicher ebener Systeme mittelst der Streckenrechnung darzustellen (Programm des Realgymnasiums zu Meiningen, 1887), was R. Mehmke schon früher für geometrische, ähnlich veränderliche Systeme gethan hat (Civilingenieur, Band 29, Heft 7). Der Gymnasialoberlehrer Hermann Grafsmann, ein Sohn unseres hochverdienten Mathematikers, bearbeitete eine allgemeine Theorie der Raumkurven und krummen Flächen (Programm der Lateinischen Hauptschule zu Halle a. d. S., Nr. 217, 1886, Nr. 220, 1888), für die er ebenfalls die Streckenrechnung verwendete. Im Jahre 1888 erschien der geometrische Kalkül von Giuseppe Peano, Professor an der Militärakademie in Turin. Aber auch Engländer, Franzosen und Amerikaner sind bestrebt, in das Wesen der Ausdehnungslehre einzudringen.

Nachdem sich durch mehrjährige von mir unternommene Studien und Erwägungen der Arbeiten Grafsmanns herausgestellt hat, dafs dessen Ausdehnungslehre nicht nur von theoretischem, sondern auch von grofsem praktischen Nutzen ist, handelt es sich nunmehr darum, die erzielten Resultate weiteren Kreisen bekannt zu geben.

Die Grundlage für die Geometrie und die theoretische Mechanik bildet der geometrische Kalkül, die Rechnung mit geometrischen Gröfsen.

Das vorliegende Werkchen giebt einen Abrifs dieses Kalküls mit Rücksicht auf seine Verwendung in der höheren Geometrie und der theoretischen Mechanik, sein Gedankengang ist ein mehr praktischer als theoretischer. Die Lehrsätze wurden in möglichst einfacher Form entwickelt. Jedem seiner Abschnitte sind Beispiele zur Übung angeschlossen worden, um dem Leser die notwendige Gelegenheit zu geben, mit dem geometrischen Rechnen vertraut zu werden, ihm zu zeigen, in welcher Art der geometrische Kalkül bei der Lösung von Problemen arbeitet.

An diesen Grundrifs sollen sich in Bälde kleinere Lehrbücher für die höhere Geometrie und die theoretische Mechanik fügen, worüber ich an der Universität Zürich ebenfalls bereits Vorlesungen halte, denn erst dann kann die Tragweite der Schöpfung Grafsmanns in weiteren Kreisen in richtiger Weise erfafst werden.

Für die polydimensionale Geometrie und die moderne Algebra, welche zunächst nur für den Mathematiker von Interesse sind, wurde ein besonderes Büchlein in Aussicht genommen.

Den Herren Gymnasiallehrern St. D.... und Dr. M. M...... in M......., welche bereitwilligst die Druckkorrektur der vorliegenden

Arbeit übernahmen, spreche ich dafür meinen besten Dank aus. Ebenso danke ich der hochgeschätzten Verlagshandlung für die exakte Ausführung des Buches.

Den Fachgenossen übergebe ich diese Abhandlung mit der Bitte um wohlwollende Beurteilung ihres Inhaltes und dem Wunsche, dafs sie durch dieselbe in die Lage kommen möchten, die Arbeiten Grafsmanns mit Leichtigkeit zu studieren.

Zürich, im Januar 1893.

Ferdinand Kraft.

Inhalt.

Einleitung. (S. 1—16.)

Erstes Kapitel.

Die Summation von Strecken und Punktgröfsen. (S. 17—62.)

Erster Abschnitt.

Die Summation von Strecken. (S. 17—33.)

Zweiter Abschnitt.

Die Summation von Punktgröfsen. (S. 33—62.)

Zweites Kapitel.

Der Drehungsfaktor. (S. 63—69.)

Drittes Kapitel.

Die äuſsere Multiplikation von Strecken und von Punkten. (S. 70—99.)

Erster Abschnitt.

Die äuſsere Multiplikation von Strecken. (S. 70—84.)

Zweiter Abschnitt.

Die äuſsere Multiplikation von Punkten. (S. 84—99.)

Viertes Kapitel.

Die Multiplikation von geometrischen Gröſsen höherer Stufe. (S. 100—228.)

Einleitung. (S. 100—104.)

Erster Abschnitt.

Die Multiplikation in der Ebene als System zweiter Stufe. (S. 104—121.)

Zweiter Abschnitt.

Die Multiplikation im Raume als System dritter Stufe.

(S. 121—149.)

Dritter Abschnitt.

Die Multiplikation im Elementarsysteme zweiter Stufe.

(S. 150—151.)

Vierter Abschnitt.

Die Multiplikation im Elementarsysteme dritter Stufe.

(S. 151—177.)

Fünfter Abschnitt.

Die Multiplikation im Raume als Elementarsystem vierter Stufe.

(S. 178—228.)

Fünftes Kapitel.

Die mittlere Multiplikation. (S. 229—255.)

(Quaternionentheorie.)

Verbesserungen.

S. 29, Z. 7 lies „linken" statt rechten.
S. 42, Z. 19 lies: vorletzten „F" in.
S. 45, Z. 2 am Ende lies „b_k" statt a_k.
S. 50, Z. 7 v. u. streiche „in".
S. 54, Z. 12 lies „A_1, B_1 und C_1" statt C_1, A_1 und B_1.
S. 76 unter 3) lies „Vieleck" statt Viereck.
S. 79, Z. 16 lies „Fig. 27" statt Fig. 25.
S. 87, Z. 5 am Ende lies „$E_1 E_2$" statt $E_2 E_1$.
S. 94, Z. 1 v. u. lies „Körperteile" statt Körperräume.
S. 98, Z. 6 lies „Tetraederkoordinaten" statt Dreieckskoordinaten.
S. 117, Formel (4) lies „$\varrho = x\varepsilon_1 + \{m_2 + \sqrt{a^2 - m_1(m_1 - 2x) - x^2}\}\varepsilon_2$".
S. 167, Z. 22 lies „ζ" statt η.

Einleitung.

§ 1. Die geometrischen Gebilde.

In der Geometrie, der Raumlehre, ist der Punkt das Element, dasjenige Gebilde, welches durch Ortsänderung sämtliche geometrischen Gebilde erzeugt, resp. erzeugen kann. Ändert ein Punkt im Raume seinen Ort stetig, so kommt er mit anderen Punkten des Raumes in Kontakt, oder er erzeugt eine Reihe stetig aufeinander folgenden Punkte, die mit gewissen Punkten des Raumes zusammenfallen, wobei wir uns den ganzen unendlichen Raum von Punkten kontinuierlich erfüllt denken. Die Gesamtheit der so erzeugten Punkte nennen wir eine Linie. Die Punkte einer Linie erscheinen somit wesentlich als verschieden, weshalb wir sie mit verschiedenen Buchstaben bezeichnen, es haftet ihnen aber nicht nur das Verschiedene, sondern auch das Gleiche an, denn wir können sie auch als die verschiedenen Lagen eines und desselben Punktes, des Erzeugers, auffassen. Das Erzeugnis, die Linie, besitzt eine gewisse Ausdehnung, eine gewisse Länge, und zwar nur eine solche. Deshalb nennen wir eine Linie ein Ausdehnungsgebilde erster Stufe und sagen:

Ein geometrisches Ausdehnungsgebilde erster Stufe ist die Gesamtheit der Punkte, in welche der dasselbe erzeugende Punkt bei stetiger Änderung übergeht.

Den erzeugenden Punkt in seinem Anfangszustande nennen wir das Anfangselement, in seinem Endzustande das Endelement und diese beiden Elemente zusammen die Grenzelemente des durch seine stetige Änderung hervorgebrachten Ausdehnungsgebildes erster Stufe.

Zu jedem Ausdehnungsgebilde gehört ein entgegengesetztes, letzteres besitzt dieselben Elemente, aber in umgekehrter Entstehungsweise wie das erstere, es sind dabei namentlich die Grenzelemente als Anfangs- und Endelement mit einander vertauscht. Ist AB eine, durch die Bewegung eines Punktes von A nach B entstandene Linie, so ist das entgegengesetzte Ausdehnungsgebilde dasjenige, welches durch die Bewegung des erzeugenden Punktes von B nach A in der

Weise hervorgebracht wird, dafs dasselbe die nämlichen Elemente, nur in umgekehrter Entstehungsweise, besitzt.

Aus dem Orte, nach welchem hin die Bewegung des erzeugenden Punktes augenblicklich stattfindet, erkennen wir die Richtung der Bewegung, die Richtung der Anderung. Von der Änderung der Richtung des Erzeugers hängt die Form, die Gestalt der Linie ab. Ist die Richtung stets dieselbe, so ist auch die Änderungsweise des erzeugenden Punktes stets dieselbe, und es entsteht dann das einfache Ausdehnungsgebilde erster Stufe, welches wir Strecke nennen. Sind A und B die Grenzelemente eines solchen Gebildes, bezeichnen wir dasselbe durch $\overline{AB}$, dann können wir sagen:

Die Strecke $\overline{AB}$ ist der Inbegriff aller Ortslagen des stetig in derselben Richtung von A nach B sich ändernden Punktes A.

Bewegt sich ein Punkt stetig in derselben Richtung von A nach B, so erzeugt er die Strecke $\overline{AB}$, bewegt er sich stets in entgegengesetzter Richtung von B nach A, so entsteht die Strecke $\overline{BA}$, das Entgegengesetzte von $\overline{AB}$. Nehmen wir die erste Erzeugungsweise als die positive an, so ist die zweite, als die entgegengesetzte, die negative, weshalb die Gleichung gilt

$$\overline{AB} = -\overline{BA}, \quad \text{oder} \quad \overline{AB} + \overline{BA} = 0,$$

denn beide Strecken haben gleiche Längen.

Ändert ein Punkt seine Lage von dem Orte A aus stetig und in der gleichen Weise ununterbrochen, ebenso von A aus stets in entgegengesetzter Richtung ununterbrochen, so erzeugt er die unendliche gerade Linie, die unbegrenzte Gerade. Die unbegrenzte gerade Linie können wir uns aus beliebig vielen Strecken zusammengesetzt denken, denn je zwei ihrer Punkte können als Grenzelemente der zwischen ihnen liegenden Strecke angesehen werden. Deshalb nennen wir die unbegrenzte gerade Linie das geometrische System erster Stufe, wohingegen die Strecke die einfache Ausdehnungsgröfse erster Stufe ist. Die Gröfse einer Strecke wird durch deren Länge, d. h. durch den wechselseitigen Abstand ihrer Grenzelemente gegeben, und es ist diese Länge das Maafs der Ausdehnung.

Verstehen wir von jetzt an unter der Richtung einer Strecke die gerade Linie, von welcher sie ein Teil ist, so haben wir an einer Strecke ihre Länge, ihre Richtung und ihren Entstehungssinn zu unterscheiden. Erstere bedingt ihre Ausdehnung, ihre Gröfse, die Richtung die gegenseitige Lage ihrer Grenzelemente, und der Entstehungssinn bestimmt die Grenzelemente als Anfangs- und Endelement. Den Ent-

stehungssinn können wir in mehrfacher Weise bezeichnen. Wir karakterisieren ihn entweder durch die Folge der Buchstaben, welche die Grenzelemente benennen, so dafs z. B. die Strecke $\overline{AB}$ im Sinne von A nach B entstanden anzusehen ist, oder durch eine in die Strecke oder an das Endelement derselben gesetzte Pfeilspitze, welche Spitze nach dem Endelemente zeigt.

Zwei Strecken nennen wir einander gleich oder äquivalent, d. h. sie sind für einander substituierbar, wenn sie gleiche Längen, gleiche Richtungen und denselben Entstehungssinn besitzen, so dafs für ihre Gleichheit ihre wechselseitige Lage nicht in Betracht kommt. — Zwei Strecken heifsen identisch gleich, wenn ihre gleichnamigen Grenzelemente zusammenfallen, wenn sie sich wechselseitig vollständig decken und denselben Entstehungssinn zeigen.

Sind zwei Strecken einer dritten Strecke gleich, so sind sie unter sich gleich.

Denn bestehen die Gleichungen

$$\overline{AB} = \overline{MN}, \quad \overline{CD} = \overline{MN},$$

so ist auch

$$\overline{AB} = \overline{CD}.$$

Besitzen zwei Strecken und zwei Systeme erster Stufe je die Beschaffenheit der Gleichartigkeit, d. h. sind sie so erzeugt, dafs der konstante Änderungssinn der sie hervorbringenden Punkte derselbe, oder der entgegengesetzte ist, so heifsen sie parallel, im ersten Falle gleichläufig, im zweiten gegenläufig parallel. Haben zwei Strecken oder zwei Systeme erster Stufe ungleichartige Richtungen, so nennen wir sie ungleichartig.

Ist die Richtung der Bewegung des ein geometrisches Gebilde erster Stufe erzeugenden Punktes nicht konstant, sondern irgend einem Gesetze unterworfen, welches deren Veränderlichkeit bedingt, dann heifst das so entstehende Gebilde eine krumme Linie oder Kurve, die Gestalt derselben ist von jenem Gesetze abhängig.

Bewegen sich alle Punkte eines geometrischen Systems erster Stufe, d. i. einer geraden Linie, in einer neuen, in ihr nicht enthaltenen Richtung in beiderlei Sinn unbegrenzt fort, dann bildet die Gesamtheit der so erzeugten Geraden das geometrische System zweiter Stufe, die Ebene. Die Elemente der sich bewegenden Geraden erzeugen hierbei parallele Strahlen, welche sämtlich von dieser Geraden in ihrer ursprünglichen Lage geschnitten werden, so dafs die Ebene die Gesamtheit aller Parallelen ist, welche eine gegebene Gerade durchschneiden.

Irgend einen vollständig und irgend wie begrenzten Teil einer Ebene nennen wir ein Feld derselben, Felder in derselben Ebene gleichartige Felder. Eine Ebene kann aus unendlich vielen gleichartigen Feldern bestehend angesehen werden.

Lassen wir die Punkte einer Ebene in einer neuen, in ihr nicht enthaltenen Richtung sich stetig in doppeltem Sinne ändern, so entsteht das einfache geometrische System dritter Stufe, der geometrische Raum als die Gesamtheit aller Strahlen, welche zu dieser Richtung parallel sind. Irgend einen allseitig begrenzten Teil dieses Raumes nennen wir einen geometrischen Körper. Körper sind stets gleichartige Gebilde. Den unendlichen geometrischen Raum können wir uns aus unendlich vielen geometrischen Körpern zusammengesetzt denken.

Weiter kann die Geometrie nicht fortschreiten, während die abstrakte Wissenschaft keine Grenzen kennt.

Das einfache System erster Stufe wird durch die Bewegung eines Punktes in konstanter Richtung und in beiderlei Richtungssinn erzeugt, wobei die Beschaffenheit, die innere Natur, dieser Bewegung ganz gleichgültig ist. Das einfache System zweiter Stufe wird durch die Bewegung eines Punktes in zwei Richtungen hervorgebracht. Das einfache System dritter Stufe wird durch die Veränderung der Ortslage eines Punktes in drei vollständig von einander verschiedenen Richtungen, die nicht in einer Ebene liegen, erzeugt. In allen Fällen hat nur die Änderung eine stetige zu sein. Das einfache System wird daher durch einfache Bewegung, durch Translation in der Richtung der Länge, dasjenige zweiter Stufe durch zweifache Bewegung, in den Richtungen der Länge und Breite, dasjenige dritter Stufe durch dreifache Bewegung, in den Richtungen der Länge, Breite und Höhe erzeugt. Deshalb sagen wir, dafs der Punkt keine, die gerade Linie eine Ausdehnung, die Ebene zwei und der Raum drei Ausdehnungen oder Dimensionen habe.

Sehen wir die gerade Linie, die Ebene und den Raum als Punktgebilde an, so erscheint der Punkt als Elementargebilde erster Stufe, die gerade Linie als Elementarsystem zweiter, die Ebene als solches dritter und der Raum als Elementarsystem vierter Stufe. Ist n die Stufenzahl eines dieser Gebilde, so ist $(n - 1)$ die Zahl seiner Dimensionen, die Anzahl der Dimensionen eines Elementarsystems ist gleich der Differenz aus seiner Stufenzahl und der absoluten Einheit.

Ein geometrischer Körper ist ein Teil des geometrischen Raumes, die Grenzelemente (Grenzpunkte) des ersteren machen in ihrer Gesamtheit das aus, was wir seine Oberfläche nennen. Dieses Grenz-

gebilde ist ein Punktgebilde, bei dem die Punkte nach einem gewissen Gesetze kontinuierlich sich aneinanderschliefsend geordnet sind.

Die Gesamtheit der stetig aufeinander folgenden, nach einem gewissen Gesetze verknüpften Elemente des Raumes, wobei im allgemeinen nie zwei Elemente zusammenfallen, nennen wir eine Fläche. Die Fläche ist im allgemeinen ein Elementarsystem dritter Stufe, befinden sich alle Elemente in einer Ebene, so ist dieses System ein einfaches, und im ersteren Falle nennen wir das Gebilde eine krumme Fläche.

Der Punkt ist das Element der (geraden) Linie. Der Punkt und die gerade Linie können als Elemente der Ebene, der Punkt, die gerade Linie und die Ebene als Elemente des Raumes aufgefafst werden. Das Element, in dem zwei Elemente niederer Stufe liegen, heifst das die letzteren verbindende Element. Z. B. ist das zwei Punkte verbindende Element die durch sie bestimmte Gerade. Das Element des Raumes, welches zwei seinen Elementen zugleich angehört, nennen wir das gemeinsame Element der letzteren. Z. B. ist das gemeinsame Element zweier nicht zusammenfallenden Ebenen ihre Schnittlinie. Denn durch irgend zwei gemeinsame Punkte beider Ebenen ist eine in jeder Ebene liegende gerade Linie bestimmt, und es müssen diese Linien zusammenfallen, als eine Gerade aufgefafst, das gemeinsame Element beider Ebenen ausmachen.

Der geometrische Kalkül beschäftigt sich mit der Verknüpfung geometrischer Gebilde, den daraus hervorgehenden Ergebnissen und den Eigenschaften dieser Verknüpfungen. Seine Operationen sind denen des algebraischen Kalküls analog, die Gröfsen (Dinge), mit denen er rechnet, sind geometrische Gebilde, nicht Zahlen, welch' letztere nur in Verbindung mit ersteren auftreten.

Unsere Untersuchungen haben ihre Stütze in der allgemeinen Formenlehre, weshalb wir diese in dem folgenden Paragraphen in Kürze so weit entwickeln, als solches für unsere Zwecke nötig ist.

§ 2. Die Grundzüge der allgemeinen Formenlehre.

Die reine Mathematik beschäftigt sich mit solchen Dingen, welche lediglich durch das Denken entstehen. Das Ergebnis des Denkens nennen wir Denkform, kurzweg Form, woraus sich der Satz ergiebt:

Die reine Mathematik ist Formenlehre.

Zunächst können zwei Formen miteinander verglichen werden. Irgend zwei Formen sind entweder einander gleich, oder voneinander verschieden. Gleiche Formen lassen sich gegenseitig substituieren,

d. h. es kann die eine für die andere gesetzt werden. Sind zwei Formen einer dritten gleich, so sind sie unter sich gleich. Weil zwei Formen in verschiedener Hinsicht miteinander verglichen werden können, so erscheinen sie gleichzeitig als gleich und als verschieden. Die Beziehungen der Gleichheit und Verschiedenheit sind von der Beschaffenheit der zu vergleichenden Dinge abhängig. An einer Strecke können wir ins Auge ihre Länge, Richtung und Lage fassen. Besitzen zwei Strecken gleiche Längen, verschiedene Richtungen und Lagen, so sind sie rücksichtlich ihrer Längen einander gleich, rücksichtlich ihrer Richtungen und Lagen voneinander verschieden.

In zweiter Linie können zwei Formen miteinander verknüpft und voneinander gesondert oder getrennt werden.

Verknüpfen wir zwei Formen oder Gröſsen unter sich, so treten sie als die Glieder der Verknüpfung auf, und die Verbindung dieser Glieder führt zu einer neuen Form, dem Ergebnisse der Verknüpfung.

Sind a und b die zu verknüpfenden Formen, bedeutet $\circ$ das allgemeine Verknüpfungszeichen, dann kann gefordert werden

$$a \circ b, \quad \text{oder} \quad b \circ a,$$

weshalb wir das links vom Verknüpfungszeichen stehende Glied das Vorderglied, das rechts von ihm sich befindende Glied das Hinterglied der Verknüpfung nennen.

Um das aus der Verknüpfung zweier Formen hervorgehende Ergebnis auszudrücken, klammern wir die Glieder der Verknüpfung ein, schreiben

$$a \circ b = (a \circ b),$$

verstehen also unter $(a \circ b)$ diejenige Begriffseinheit, welche aus der Verbindung der Glieder a und b hervorgeht.

Von der Verknüpfung zweier Glieder gelangen wir sofort zu einer Verknüpfung mehrerer Glieder, die jedoch zunächst stets als diejenige zweier Glieder erscheint. Es ist offenbar

$$(a \circ b) \circ c = \{(a \circ b) \circ c\}.$$

Setzen wir hier $(a \circ b) = d$, so wird, weil auch $a \circ b = d$ ist,

$$a \circ b \circ c = \{(a \circ b) \circ c\}.$$

In entsprechender Weise verhält es sich, wenn vier und mehr Glieder miteinander zu verknüpfen sind.

Jede Verknüpfung zweier Formen hat nach einem gewissen Gesetze stattzufinden, welches die Beschaffenheit des Ergebnisses bedingt. Von der Art der Verknüpfung hängt es ab, unter welchen Umständen und in welcher Ausdehnung das Ergebnis dasselbe bleibt.

An einer gegebenen Verknüpfung können wir nur, ohne die einzelnen verknüpften Formen selbst zu ändern, die Klammern ändern und ihre Glieder versetzen.

Zuerst nehmen wir an, dafs für jede dreigliederige Verknüpfung das Gesetz der Assoziativität gelte, dafs

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c = a \circ b \circ c \qquad (1)$$

sei, dafs das Setzen von Klammern keine Änderung des Ergebnisses hervorbringe.

Nun gelte für irgend drei Glieder einer mehrgliederigen Verknüpfung das assoziative Gesetz, sei gegeben der Ausdruck

$$a \circ \{b \circ c \circ (d \circ e)\},$$

so dürfen wir successive setzen

$$\begin{aligned} a \circ \{b \circ c \circ (d \circ e)\} &= a \circ \{(b \circ c) \circ (d \circ e)\} = a \circ (b \circ c) \circ (d \circ e) \\ &= [a \circ (b \circ c)] \circ (d \circ e) = [a \circ b \circ c] \circ (d \circ e) \\ &= [a \circ b \circ c] \circ d \circ e = a \circ b \circ c \circ d \circ e, \end{aligned}$$

woraus wir das Resultat ziehen:

Gilt für drei Glieder einer mehrgliedrigen Verknüpfung das Gesetz der Assoziativität, so gilt es auch für beliebig viele Glieder derselben. Die Assoziativität einer Verknüpfung ist erwiesen, sobald sie für irgend drei Glieder derselben dargethan worden ist.

Solche Verknüpfungen nennen wir assoziative Verknüpfungen.

Ferner können wir annehmen, dafs eine Vertauschung der Glieder einer zweigliederigen Verknüpfung, oder zweier aufeinanderfolgender Glieder einer mehrgliederigen Verknüpfung auf das Ergebnis keinen Einflufs habe, dafs

$$a \circ b = b \circ a \qquad (2)$$

sei. Wir erkennen sofort, dafs aus diesem kommutativen Gesetze allein keine weitere Folgerung gezogen werden kann.

Sind a und b Zahlen, so ist $a + b = b + a$, $ab = ba$, $a^b \gtrless b^a$, $\sqrt[b]{a} \gtrless \sqrt[a]{b}$.

Nunmehr gelte das assoziative Gesetz (für drei Glieder) und das kommutative Gesetz für zwei Glieder einer mehrgliederigen Verknüpfung. Sei gegeben

$$a \circ \{b \circ (c \circ d)\} = a \circ b \circ c \circ d,$$

dann dürfen wir setzen

$$\begin{aligned} a \circ \{b \circ (c \circ d)\} &= a \circ \{b \circ (d \circ c)\}, \text{ nach (2)}, \\ &= a \circ \{b \circ d \circ c\} \\ &= a \circ \{(b \circ d) \circ c\} \quad \Big\} \text{ nach (1)}, \\ &= a \circ \{(d \circ b) \circ c\}, \text{ nach (2)}, \\ &= a \circ \{d \circ b \circ c\}, \text{ nach (1)}, \\ &= \{d \circ b \circ c\} \circ a, \text{ nach (2)}, \\ &= d \circ b \circ c \circ a, \text{ nach (1)}, \end{aligned}$$

woraus der Satz folgt:

Gilt das assoziative Gesetz (für drei Glieder), das kommutative Gesetz (für zwei Glieder) bezüglich einer mehrgliederigen Verknüpfung, so ist die Stellung der Klammern und die Ordnung der Glieder auf das Ergebnis ohne Einflufs.

Solche assoziative und kommutative Verknüpfungen heifsen einfache Verknüpfungen.

Um eine weitere Bestimmung für die Art einer Verknüpfung zu treffen, müssen wir auf die Beschaffenheit der verknüpften Formen eingehen.

Dem synthetischen, dem verknüpfenden Verfahren steht das analytische, oder auflösende Verfahren gegenüber.

Das lösende Verfahren besteht darin, eine zweigliederige Verknüpfung ins Auge gefafst, zu dem einen Gliede und dem Ergebnisse der Verknüpfung das andere Glied zu suchen, entweder das Vorderglied, oder das Hinterglied zu bestimmen, wenn

$$a \circ b = c$$

und x das zu ermittelnde Glied ist, entweder die Gleichung

$$x \circ b = c,$$

oder die Gleichung

$$a \circ x = c$$

aufzulösen, so dafs zu einer synthetischen Verknüpfung zwei analytische Verfahrungsarten gehören. Die beiden Lösungsarten sind nur dann identisch, wenn die betrachtete Verknüpfung kommutativ ist.

Sind z. B. a, c und x Zahlen, so haben wir $x + a = c$ und $a + x = c$, $xa = c$ und $ax = c$, $a^x = c$ und $x^a \gtrless c$.

Offenbar kann auch das lösende Verfahren als eine Verknüpfung angesehen werden, wodurch wir es nunmehr mit der ursprünglichen oder synthetischen und der auflösenden oder analytischen Verknüpfung zu thun haben.

In der Folge betrachten wir nur einfache synthetische Verknüpfungen, für sie sind die entsprechenden analytischen Verknüpfungen einander

gleich. Für die synthetische Verknüpfung behalten wir das Zeichen $\circ$ bei, und für die entsprechende lösende Verknüpfung wählen wir $\smile$ als Zeichen.

Besteht die Relation

$$a \circ b = c, \qquad \text{oder} \qquad c = a \circ b$$

so folgt

$$\begin{aligned} c \smile b &= a, & c \smile a &= b, \\ (c \smile b) \circ b &= a \circ b, & (c \smile a) \circ a &= b \circ a, \\ c \smile b \circ b &= c, & c \smile a \circ a &= c. \end{aligned} \tag{3}$$

Verknüpfen wir eine Form analytisch und synthetisch mit einer anderen Form, so ist das Ergebnis der ersten Form gleich.

Nun haben wir zu untersuchen, ob die analytische Verknüpfung kommutativ ist. Zu dem Ende sei gegeben

$$x = a \smile b \smile c,$$

aus welcher Relation folgt

$$x \circ c = a \smile b, \quad (x \circ c) \circ b = a,$$
$$x \circ c \circ b = a,$$

aber dann ist auch

$$x \circ b \circ c = a,$$

wodurch sich ergiebt

$$x \circ b = a \smile c = (a \smile c),$$
$$x = (a \smile c) \smile b = a \smile c \smile b,$$

mithin ist

$$a \smile b \smile c = a \smile c \smile b.$$

Die einer einfachen synthetischen Verknüpfung entsprechende analytische Verknüpfung ist kommutativ.

Weiter haben wir zu untersuchen, ob das Setzen und Weglassen von Klammern auf das Ergebnis von Einfluſs ist, wenn die Glieder eines Ausdruckes teils synthetisch, teils analytisch miteinander verbunden sind.

Weil die Beziehung

$$x \circ (b \circ c) = x \circ (c \circ b) = a$$

besteht, so ist auch

$$\left.\begin{aligned} x &= a \smile (b \circ c) = a \smile b \smile c, \\ x &= a \smile (c \circ b) = a \smile c \smile b. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ist ferner

$$x = a \smile (b \smile c),$$

so dürfen wir nach (3) setzen

$$x = \{a \smile (b \smile c)\} \smile c \circ c,$$

woraus unter Beachtung von (1) und (4) folgt

$$x = a \smile (b \smile c \circ c) \circ c,$$

$$x = a \smile b \circ c,$$

wodurch sich ergiebt

$$a \smile (b \smile c) = a \smile b \circ c. \tag{5}$$

Die durch die Gleichungen (4) und (5) ausgedrückten Ergebnisse gelten allgemein, gleichviel ob das Resultat der analytischen Verknüpfung eindeutig oder mehrdeutig ist.

Ist die Gleichung gegeben

$$x \circ b = c,$$

so ist

$$x = c \smile b,$$

und die Lösung kann eine eindeutige, oder eine mehrdeutige sein. Sind x_1 und x_2 zwei Wurzeln der Gleichung, so ist

$$x_1 \circ b = c, \quad x_2 \circ b = c,$$

daher haben wir

$$x_1 \circ b = x_2 \circ b$$

und es ist

$$x_1 = c \smile b, \quad x_2 = c \smile b,$$

so dafs, wenn $(c \smile b)$ nur einen Wert hat, folgt

$$x_1 = x_2.$$

Besteht nun die Relation

$$a \circ b = x \circ b,$$

d. h. ist

$$a \circ b \smile b = x,$$

so hat diese Gleichung nur dann eine Wurzel, wenn $x = a$ ist. Mithin müssen wir, wenn die analytische Lösung eindeutig sein soll, die Beziehung

$$a \circ b \smile b = a \tag{6}$$

haben.

Nach (3) besteht die Relation

$$b = b \smile c \circ c = (b \smile c) \circ c,$$

daher ist auch

$$a \circ b = a \circ \{(b \smile c) \circ c\},$$

ferner

$$a \circ b \smile c = a \circ \{(b \smile c) \circ c\} \smile c$$

$$= a \circ \{(b \smile c) \circ c \smile c\},$$

mithin haben wir wegen (6)

$$a \circ b \smile c = a \circ (b \smile c) \tag{7}$$

und auch umgekehrt

$$a \circ (b \smile c) = a \circ b \smile c, \qquad (7')$$

welche Relation nur dann Gültigkeit hat, wenn das Resultat der analytischen Verknüpfung eindeutig ist.

Unter dieser Proposition haben wir noch

$$a \circ b \smile c = b \circ a \smile c = b \circ (a \smile c) = (a \smile c) \circ b = a \smile c \circ b, \qquad (8)$$

so dafs bei Eindeutigkeit der analytischen Verknüpfung auch Glieder, die synthetische und analytische Vorzeichen haben, miteinander vertauscht werden dürfen.

Die Beziehungen, welche die Gleichungen (4), (5), (7) und (8) ausdrücken, lassen sich in dem Satze zusammenfassen:

Ist eine synthetische Verknüpfung eine einfache und die entsprechende analytische eine eindeutige, so können wir nach einem synthetischen Zeichen Klammern beliebig setzen oder weglassen, nach einem analytischen Zeichen dagegen darf nur dann eine Klammer gesetzt oder weggelassen werden, wenn wir die Zeichen in der Klammer in der Weise ändern, dafs wir ein synthetisches in ein analytisches und ein analytisches in ein synthetisches Zeichen verwandeln, und es sind irgend zwei Glieder miteinander vertauschbar, ohne dafs sich das Ergebnis ändert.

Sei gegeben

$$a \circ b \smile c = d.$$

Erleidet das Glied b eine Änderung, wird b zu $b \circ \triangle b$, oder zu $b \smile \triangle b$, dann haben wir, weil

$$a \circ b = d \circ c$$

ist,

$$(a \circ b) \circ \triangle b = (d \circ c) \circ \triangle b = d \circ \triangle b \circ c,$$

folglich

$$a \circ (b \circ \triangle b) \smile c = d \circ \triangle b \gtrless d,$$

und in entsprechender Weise ergiebt sich

$$a \circ (b \smile \triangle b) \smile c = d \smile \triangle b \gtrless d.$$

Geht das Glied c in $c \circ \triangle c$, oder in $c \smile \triangle c$ über, so finden wir auf ähnlichem Wege

$$a \circ b \smile (c \circ \triangle c) = d \smile \triangle c \gtrless d,$$
$$a \circ b \smile (c \smile \triangle c) = d \circ \triangle c \gtrless d.$$

Ändert sich irgend ein Glied einer einfachen Verknüpfung mit eindeutiger analytischer Verknüpfung, so ändert sich stets das Ergebnis der ersteren.

Findet die Eindeutigkeit des Resultates bei einer einfachen synthetischen Verknüpfung auf allgemeine Weise statt, so nennen wir die synthetische Verknüpfung Addition und die entsprechende analytische Subtraktion.

Addition heifst jede synthetische Verknüpfung, die assoziativ, kommutativ und deren Umkehrung, die Subtraktion, stets eindeutig ist. Zum Nachweis der Assoziativität genügt derjenige für die Assoziativität dreier Glieder; die Kommutativität ist erwiesen, sobald sie für zwei Glieder der Verbindung dargethan worden ist.

Wir haben gefunden, dafs

$$a \circ (b \cup b) = a, \quad c \circ (b \cup b) = c$$

ist, woraus folgt

$$a \cup a = b \cup b = c \cup c.$$

Demnach resultiert aus der analytischen Verknüpfung zweier gleicher Formen eine Form, welche von dem Werte der Glieder dieser Verknüpfung unabhängig ist, weshalb wir eine solche Verknüpfung eine indifferente Form nennen.

Setzen wir voraus, dafs das Ergebnis der analytischen Verknüpfung eindeutig sei, so ist es offenbar auch die indifferente Form, für welch' letztere wir das Zeichen $\backsim$ wählen wollen.

Für die Verknüpfung einer indifferenten Form mit einer anderen Form, ergeben sich, wenn wir beachten, dafs

$$\backsim = a \cup a = b \cup b = \ldots$$

ist, leicht die folgenden Resultate:

$$(\backsim \circ a) = \circ\, a = a,$$

$$(\backsim \cup a) = \cup\, a = (\cup\, a),$$

$$(a \circ \backsim) = (a \cup \backsim).$$

Weiter haben wir

$$\circ\, (\cup\, a) = \circ\, (b \cup b \cup a) = (b \cup b) \cup a = (\backsim \cup a),$$

folglich ist

$$\circ\, (\cup\, a) = \cup\, a.$$

Endlich bekommen wir

$$\cup\, (\cup\, a) = \cup\, \{(b \cup b) \cup a\} = \cup\, b \circ b \circ a = (b \cup b) \circ a$$
$$= \circ\, a \circ (b \cup b),$$

mithin ist

$$\cup\, (\cup\, a) = \circ\, a = a.$$

Wir nennen, wenn die synthetische Verknüpfung einfach, die entsprechende analytische eindeutig ist, die erstere die positive, die zweite die negative Verknüpfungsform, und wir bezeichnen in diesem Falle die indifferente Form, welche keine Änderung des Ergebnisses hervorbringt, mit dem Namen Null.

Adoptieren wir für die Addition und die Subtraktion die Zeichen der Arithmetik, so erhalten wir für sie die durch die folgenden Gleichungen ausgedrückten Gesetze:

$$a + b = b + a, \qquad a - a = b - b = 0,$$
$$a + (b \pm c) = (a + b) \pm c = a + b \pm c,$$
$$a - (b \pm c) = (a - b) \mp c = a - b \mp c,$$
$$a + b - b = a + 0 = a,$$
$$a - b + b = a - 0 = a.$$

Nunmehr haben wir zwei von einander verschiedene synthetische Verknüpfungsarten zu betrachten. Wenn wir ihre Beziehungen zu einander feststellen wollen, so mufs die eine durch die andere ihrem Begriffe nach bestimmt sein, wir müssen wissen, wie ein Ausdruck, in welchem beide Verknüpfungsarten vorkommen, ohne Änderung des Gesamtergebnisses umgestaltet werden kann.

Sind $\circ$ und $\overset{\circ}{\circ}$ die Zeichen für die beiden verschiedenen Verknüpfungsarten, so ist der einfachste Ausdruck, in welchem diese Verknüpfungen vorkommen,

$$(a \circ b) \overset{\circ}{\circ} c.$$

In welcher Weise die zweite Verknüpfungsart auf die Glieder der ersten Verknüpfung wirken soll, das ist ganz unserer Willkür überlassen. Am einfachsten ist es, wenn wir annehmen, dafs die zweite Verknüpfung auf die Glieder der ersten Verknüpfung sich gleichmäfsig erstrecken soll, dafs jedes Glied der ersten Verknüpfung mit dem dritten Gliede durch die zweite Verknüpfungsart zu verbinden sei, wodurch wir zu der Gleichung gelangen

$$(a \circ b) \overset{\circ}{\circ} c = (a \overset{\circ}{\circ} c) \circ (b \overset{\circ}{\circ} c),$$

und unter entsprechender einfacher Präposition ist offenbar

$$c \overset{\circ}{\circ} (a \circ b) = (c \overset{\circ}{\circ} a) \circ (c \overset{\circ}{\circ} b).$$

Bestehen diese beiden Gleichungen gleichzeitig, so drücken sie das Gesetz der vollkommenen Distributivität aus. Ist dann die erste Verknüpfung eine Addition, so nennen wir die zweite eine Multiplikation. Die Addition erscheint als eine Verknüpfung erster, die Multiplikation als eine solche zweiter Stufe.

Entlehnen wir die Zeichen für die Multiplikation der Arithmetik, so haben wir

$$(a+b)c = ac + bc,$$
$$c(a+b) = ca + ba.$$

Beachten wir, dass $a = (a-b)+b$ ist, so erhalten wir

$$ac - bc = \{(a-b)+b\}c - bc = (a-b)c + bc - bc$$
$$= (a-b)c,$$

mithin ist umgekehrt

$$(a-b)c = ac - bc,$$

und in entsprechender Weise finden wir

$$c(a-b) = ca - cb,$$

so dafs auch für Differenzen das Distributivitätsgesetz gilt.

Steht eine Verknüpfung zur Addition in vollständiger distributiver Beziehung, so ist dieses auch bezüglich der Subtraktion der Fall und es heifst eine solche Verknüpfung Multiplikation.

Die durch Multiplikation mit einander zu verknüpfenden Glieder nennen wir Faktoren, das Ergebnis aus der Multiplikation zweier Faktoren ihr Produkt.

Setzen wir

$$s = a + b, \quad c = d + e,$$

so ergiebt sich

$$s(d+e) = sd + se = (a+b)d + (a+b)e,$$
$$(a+b)(d+e) = ad + bd + ae + be.$$

Setzen wir

$$s = a + b, \quad c = d - e,$$

so erhalten wir

$$s(d-e) = sd - se = (a+b)d - [(a+b)e] = ad + bd - [ae + be],$$
$$(a+b)(d-e) = ad + bd - ae - be.$$

In entsprechender Weise finden wir

$$(a-b)(d+e) = ad - bd + ae - be,$$
$$(a-b)(d-e) = ad - bd - ae + be.$$

Sind die Faktoren eines Produktes durch Addition und Subtraktion gegliedert, so können wir, ohne das Gesamtergebnis zu alterieren, jedes Glied des einen mit jedem Gliede des anderen Faktors multiplizieren und die so hervorgehenden Produkte durch Additions- und Subtraktionszeichen

verbinden, je nachdem die Vorzeichen ihrer Faktoren gleich oder ungleich waren.

Eine Vertauschbarkeit der Faktoren der hierdurch sich ergebenden Produkte ist im allgemeinen ohne Änderung des Gesamtergebnisses nicht möglich. Denn ob eine Vertauschung dieser Faktoren ohne Änderung des Gesamtresultates zulässig ist, das hängt entweder von der Natur der zu verknüpfenden Formen, oder von einer weiteren, an die Multiplikation zu stellenden Bedingung ab.

In der Arithmetik ist stets $ab = ba$, wo a und b Zahlen bedeuten, nicht aber in der Geometrie, wo es sich um die Multiplikation geometrischer Gröſsen handelt.

Die der Multiplikation entgegengesetzte Operation heiſst Division. Die letztere besteht darin, den einen Faktor eines Produktes zu ermitteln, wenn der andere Faktor und das Produkt selbst gegeben sind. Dann ist entweder das Vorder- oder das Hinterglied des Produktes zu suchen.

Sei das Vorderglied x zu suchen, sei gegeben

$$x \cdot c = a,$$

so schreiben wir, um dies auszudrücken,

$$x = \frac{a}{\cdot c},$$

d. h. multiplizieren wir x als Vorderglied mit c, so erhalten wir a.

Hiernach bedeutet $\frac{a+b}{\cdot c}$ diejenige Form, welche als Vorderglied mit c multipliziert $a + b$ giebt. Setzen wir

$$\frac{a+b}{\cdot c} = \frac{a}{\cdot c} + x,$$

so ist

$$a + b = a + xc$$

also

$$b = xc,$$

mithin ist

$$\frac{a+b}{\cdot c} = \frac{a}{\cdot c} + \frac{b}{\cdot c}.$$

In gleicher Weise finden wir

$$\frac{a-b}{\cdot c} = \frac{a}{\cdot c} - \frac{b}{\cdot c}.$$

Ist das Hinterglied das gesuchte, so haben wir

$$x = \frac{a}{c \cdot}, \quad cx = a,$$

ferner ergiebt sich in derselben Weise, wie vorhin,

$$\frac{a \pm b}{c\cdot} = \frac{a}{c\cdot} \pm \frac{b}{c\cdot}.$$

Mithin ist ganz allgemein, wenn c das bekannte Hinter- oder Vorderglied bedeutet,

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}.$$

Für die Division gilt ganz allgemein, mag ihr Resultat eindeutig oder vieldeutig sein, das Gesetz der Zerstückung des Dividenden.

Die soeben abgeleiteten Gesetze geben die allgemeine Beziehung der Multiplikation und der Division zu der Addition und Subtraktion.

Erst in den besonderen Fällen, wo die Beschaffenheit der zu verknüpfenden Formen mit in Frage kommt, kann über die Vertauschbarkeit und die Vereinbarkeit der Faktoren mit Rücksicht auf die Änderung des Ergebnisses entschieden werden.

Diese kurze Darstellung der allgemeinen Formenlehre wird für unsere Zwecke ausreichen, sie ist eine Rekapitulation derjenigen von H. Grafsmann in A_1, Seite 1 bis 14. Mit A_1 und mit A_2 werden nämlich die Ausdehnungslehre von 1844 und diejenige von 1862 bezeichnet.

Erstes Kapitel.

Die Summation von Strecken und Punktgröfsen.

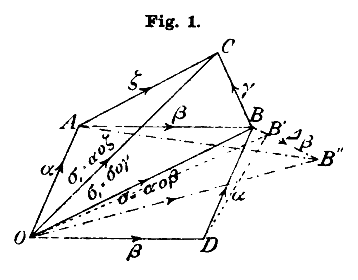
Erster Abschnitt.

Die Summation von Strecken.

§ 1. Die Summation von Strecken.

Eine Strecke, deren Anfangspunkt U, deren Endpunkt V ist, bezeichnen wir mit $\overline{UV}$, wodurch aus der Bezeichnung ihr Entstehungssinn hervorgeht. Um bequemer mit Strecken zu rechnen, benennen wir sie durch einen Buchstaben, setzen $\overline{UV} = \xi$, uns in der Regel der Buchstaben des kleinen griechischen Alphabetes bedienend, und wir haben uns in diesem Falle die Strecke ξ stets im Sinne ihrer Entstehung zu denken, so dafs ξ eine positive, $-\xi$ die ihr entgegengesetzt gleiche Strecke bedeutet, wobei also ξ und $-\xi$ zwei Strecken von gleichen Längen, denselben Richtungen und verschiedenem Entstehungssinn ausdrücken.

Fig. 1.



Seien $\overline{OA} = \alpha$, $\overline{AB} = \beta$, $\overline{BC} = \gamma$ drei ungleichartige, nicht in einer Ebene gelegene Strecken, die so mit einander verknüpft sind, dafs das Anfangselement der zweiten mit dem Endelemente der ersten, das Anfangselement der dritten mit dem Endelemente der zweiten zusammenfällt (Fig. 1). Diese drei Strecken können als von einem Punkte erzeugt angesehen werden, nämlich so, dafs ein von O ausgehender Punkt zuerst die Strecke $\overline{OA}$ hervorbringt, im Punkte A angekommen, seine Bewegungsrichtung plötzlich ändert, in eine neue konstante Trans-

lationsrichtung eintritt und dadurch die Strecke $\overline{AB}$ erzeugt, endlich vom Punkt B aus, infolge einer dritten konstanten Bewegungsrichtung, die Strecke $\overline{BC}$ beschreibt.

Die Punkte O und B bestimmen die Strecke $\overline{OB}$, die Punkte O und C die Strecke $\overline{OC}$ und die Punkte A und C die Strecke $\overline{AC}$. Daher kann die Strecke $\overline{OB} = \sigma$ als eine Verknüpfung der Strecken α und β, die Strecke $\overline{OC} = \sigma_1$ als eine solche von σ und γ, aber auch als eine Verknüpfung von $\overline{OA} = \alpha$ und $\overline{AC} = \zeta$ angesehen werden, welche Verknüpfungen sämtlich gleichartig sind, und wobei ζ aus der entsprechenden Verknüpfung von β und γ hervorgeht. Dieses führt zu den Gleichungen:

$$\alpha \circ \beta = \sigma, \quad \sigma \circ \gamma = \sigma_1 = \alpha \circ \zeta, \quad \beta \circ \gamma = \zeta,$$

aus welchen sich ergiebt, wenn wir σ, σ_1 und ζ eliminieren,

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma) = \alpha \circ \beta \circ \gamma. \tag{1}$$

Mit $\overline{OD} = \overline{AB} = \beta$, $\overline{DB'} = \overline{OA} = \alpha$ ist

$$\overline{OD} + \overline{DB'} = \overline{OB'}, \quad \text{oder} \quad \beta \circ \alpha = \overline{OB'},$$

ferner ist

$$\overline{B'D} + \overline{DO} = \overline{B'O},$$

oder

$$(\smile \alpha) \circ (\smile \beta) = \smile \alpha \smile \beta = \smile (\alpha \circ \beta) = \smile \overline{OB'},$$

$$\smile \{\smile (\alpha \circ \beta)\} = \smile (\smile \overline{OB'}), \quad \alpha \circ \beta = \overline{OB'}.$$

Daher ist

$$\alpha \circ \beta = \overline{OB} = \overline{OB'} = \beta \circ \alpha,$$

es koinzidieren die Strecken $\overline{OB'}$ und $\overline{OB} = \sigma$, und es ist

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha. \tag{2}$$

Die Figur OAB, zusammengesetzt aus den Strecken $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ und $\overline{OB}$ nennen wir ein Dreieck, das Dreieck der Punkte O, A, B, und die eben genannten Strecken heifsen die Seiten dieses Dreiecks. Die Figur $OABD$, zusammengesetzt aus den Strecken $\overline{OA}$, $\overline{DB}$, $\overline{AB}$ und $\overline{OD}$, wobei $\overline{OA} = \overline{DB}$, $\overline{AB} = \overline{OD}$ ist, in welcher also die einander gegenüberliegenden Seiten von gleicher Ausdehnung und parallel sind, nennen wir ein Parallelogramm oder ein Spatheck.

Ändert sich ein Glied der Verknüpfung $(\alpha \circ \beta)$, etwa das zweite, geht die Strecke $\overline{AB}$ in die Strecke $\overline{AB''} = \overline{AB} \circ \overline{BB''} = \beta \circ \Delta \beta$ über, dann ist

$$\overline{OB''} = \overline{OA} \circ \overline{AB''} = \overline{OA} \circ (\overline{AB} \circ \overline{BB''}),$$
$$\overline{OB''} = \alpha \circ (\beta \circ \varDelta\beta) = (\alpha \circ \beta) \circ \varDelta\beta,$$
$$\overline{OB''} = \sigma \circ \varDelta\beta \gtrless \alpha \circ \beta. \tag{3}$$

Die Relationen (1), (2) und (3) sagen aus, dafs unsere Verknüpfung von Strecken assoziativ, kommutativ und ihr Ergebnis eindeutig ist, sie ist mithin eine Addition und die entsprechende analytische Verknüpfung ist eine Subtraktion.

Wenden wir nun die für die Addition und Subtraktion in der Arithmetik gebräuchlichen Zeichen an, so ist

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha,$$
$$\alpha + \beta = \sigma, \quad \alpha + \beta + \gamma = \sigma_1.$$

Was bezüglich der Summe von zwei und drei Streckenposten gilt, deren Grenzelemente so zusammenfallen, dafs das Anfangselement des folgenden mit dem Endelemente des vorhergehenden Postens koinzidiert, gilt unter denselben Umständen auch von der Summe beliebig vieler Strecken, und es ist die Gleichartigkeit nur ein besonderer Fall der Ungleichartigkeit. Dadurch können wir den allgemeinen Satz aussprechen:

Die Summe beliebig vieler Strecken, welche in ihrer Folge die Seiten irgend eines Polygonzuges bilden, die erzeugt gedacht werden können durch die Bewegung eines Punktes von dem Anfangselemente der ersten nach dem Anfangselemente der zweiten, sodann nach dem der dritten Seite u. s. f., ist gleich der Schlufslinie dieses Polygonzuges in dem Richtungssinne vom Anfangselemente der ersten nach dem Endelemente der letzten Seite. Ist die Schlufslinie gleich Null, d. h. bilden die Streckenposten selbst ein geschlossenes Polygon, so ist die Summe gleich Null.

Weil wir zwei Strecken als einander gleich ansehen, wenn sie gleich lang und gleichläufig parallel sind, so resultiert unmittelbar der ganz allgemein gültige Satz:

Die Summe beliebig vieler Strecken von irgend welcher wechselseitigen Lage ist äquivalent der Schlufslinie des Polygonzuges mit willkürlich gewähltem Anfangspunkte, welcher zu Seiten den Posten gleiche Strecken in beliebiger Reihenfolge besitzt, in dem Richtungssinne von seinem Anfangs- nach seinem Endpunkte. Die Summe verschwindet, wenn das Anfangs- und das Endelement dieses Polygonzuges zusammenfallen, wenn er sich selbst schliefst.

Das so entstehende Polygon führt den Namen Summationspolygon.

Sind die zu addierenden Strecken gleichartig, d. h. sind sie einander parallel, oder gehören sie einem einfachen Systeme erster Stufe an, dann fällt das Summationspolygon in eine zu dem Streckenposten parallele gerade Linie.

Die Subtraktion ist Addition in entgegengesetztem Sinne, denn es ist

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta).$$

Ist

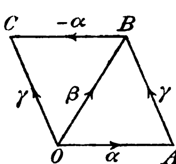
$$\alpha + \gamma = \beta,$$

dann ist

$$\gamma = \beta - \alpha = \beta + (-\alpha) = -\alpha + \beta.$$

Ist $\overline{OA} = \alpha$, $\overline{OB} = \beta$ (Fig. 2), dann ist, mit $\overline{BC} = \overline{AO} = -\alpha$, die Strecke $\overline{OC} = \beta + (-\alpha) = \gamma$, aber es ist $\overline{AB} = \overline{OC}$, mithin ist auch

Fig. 2.



$$\gamma = \beta - \alpha = \overline{OB} - \overline{OA} = \overline{AB}.$$

Der Unterschied aus zwei Strecken mit gemeinsamem Anfangspunkte ist gleich der Strecke von dem Endpunkte des Subtrahenden nach dem Endpunkte des Minuenden.

Ist $\overline{AB} = \gamma$ irgend eine Strecke, ziehen wir von einem beliebigen Punkte O aus nach deren Grenzelementen A und B die Strecken $\overline{OA} = \alpha$, $\overline{OB} = \beta$, dann ist

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}, \quad \text{oder} \quad \gamma = \beta - \alpha.$$

Wir nennen die Strecken α und β, welche in einem Punkte O entspringen, die Träger der Grenzpunkte A und B der Strecke γ bezüglich des Punktes O, wodurch wir den für die Rechnung mit Strecken wichtigen Satz aufstellen können:

Jede Strecke ist gleich der Differenz aus den Trägern ihres End- und ihres Anfangselementes bezüglich irgend eines Punktes des Raumes.

Aus dem Dreiecke AOB (Fig. 2), dessen Seiten die Strecken α, β und γ sind, folgt

$$\gamma = \beta - \alpha, \quad \beta = \gamma + \alpha, \quad \alpha = \beta - \gamma,$$

dafs irgend eine Dreiecksseite stets die algebraische Summme der beiden anderen Seiten ist.

§ 2. Beziehung gleichartiger Strecken zu einander.

Ist, indem wir allgemein beliebige Zahlen durch die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets ausdrücken,

$$\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_m$$

und sind die Posten dieser Summe sämtlich einander gleich, gleich α, dann ist

$$\sigma = m\alpha = \alpha m, \quad \frac{\sigma}{\alpha} = m, \quad \frac{\alpha}{\sigma} = \frac{1}{m},$$

woraus folgt, dafs der Quotient aus zwei Strecken, von denen die erste ein ganzes Vielfaches der anderen ist, stets eine ganze Zahl ist.

Sind nun σ und α irgend zwei gleichläufig parallele Strecken und ist $\sigma > \alpha$, dann können wir, unter $m, m_1, m_2, \ldots m_n, m_{n+1}$ ganze Zahlen verstanden, setzen

$$\begin{array}{llll}
\sigma = m\alpha + \varrho, & \text{wobei} & \alpha > \varrho < \frac{1}{2}\alpha & \text{ist,} \\
\alpha = m_1\varrho + \varrho_1, & \text{"} & \varrho > \varrho_1 < \frac{1}{2}\varrho & \text{"} \\
\varrho = m_2\varrho_1 + \varrho_2, & \text{"} & \varrho_1 > \varrho_2 < \frac{1}{2}\varrho_1 & \text{"} \\
\cdots & & & \\
\cdots & & & \\
\varrho_{n-1} = m_{n+1}\varrho_n + \varrho_{n+1}, & \text{"} & \varrho_n > \varrho_{n+1} < \frac{1}{2}\varrho_n & \text{"} \\
\cdots & & & \\
\cdots & & &
\end{array}$$

Hierbei bilden die Reststrecken $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots$, welche mit σ und α gleichläufig parallel sind, eine Streckenreihe, deren Glieder sich immer mehr und mehr dem Verschwinden nähern. Aus den vorstehenden Gleichungen folgt, wenn wir sie der Reihe nach mit $\alpha, \varrho, \varrho_1, \ldots \varrho_n$ teilen,

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma}{\alpha} &= m + \frac{\varrho}{\alpha} = m + \frac{1}{\alpha : \varrho}, \\
\frac{\alpha}{\varrho} &= m_1 + \frac{\varrho_1}{\varrho} = m_1 + \frac{1}{\varrho : \varrho_1}, \\
\frac{\varrho}{\varrho_1} &= m_2 + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = m_2 + \frac{1}{\varrho_1 : \varrho_2}, \\
&\cdots \\
&\cdots \\
\frac{\varrho_{n-1}}{\varrho_n} &= m_{n+1} + \frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n} = m_{n+1} + \frac{1}{\varrho_n : \varrho_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Nun giebt die Substitution des Wertes eines jeden Quotienten auf der rechten Seite dieser Gleichungen aus der nächstfolgenden Gleichung

$$\frac{\sigma}{\alpha} = m + \frac{1}{m_1 + \frac{1}{m_2 + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{m_n + \frac{1}{m_{n+1} + \cdots}}}}}$$

und weil der Wert des Kettenbruches auf der rechten Seite dieser Gleichung eine Zahl ist, so ergiebt sich, wenn wir diese Zahl mit q hezeichnen,

$$\frac{\sigma}{\alpha} = q, \quad \sigma = q\alpha.$$

Ist der Wert irgend eines Quotienten $(\varrho_{n-1} : \varrho_n)$ eine ganze Zahl, so ist das zugehörige m_{n+1} in der Reihe der m das letzte, der Kettenbruch bricht alsdann mit dem Gliede m_{n+1} ab, der Wert q desselben ist eine rationale Zahl und die beiden Strecken σ und α heifsen in Bezug aufeinander kommensurabel. Zugleich ist der letzte Rest ϱ_n das gröfste gemeinschaftliche Maafs, welches für σ und α überhaupt möglich ist. Ist dagegen der Wert keines Quotienten aus zwei aufeinander folgenden Reststrecken eine ganze Zahl, d. h. bricht der Kettenbruch nicht ab, so ist q eine irrationale Zahl, alsdann giebt es keine Strecke, welche ein ganzes Vielfaches von σ und α zugleich ist, und letztere heifsen deshalb in Bezug aufeinander inkommensurabel.

Sind σ und α_1 gegenläufig parallel, setzen wir in der letzten Gleichung $\alpha = -\alpha_1$, so folgt

$$\sigma = q(-\alpha_1) = q(-1)\alpha_1 = -q\alpha_1,$$

mithin ist ganz allgemein

$$\sigma = q\alpha, \quad \frac{\sigma}{\alpha} = q,$$

q positiv oder negativ, je nachdem σ und α gleich- oder gegenläufig parallel sind, was zu dem Satze führt:

Der Quotient aus irgend zwei gleichartigen Strecken ist stets eine reelle Zahl. Um die Länge einer Strecke zu erhalten, haben wir sie mit einer anderen, gleichläufig parallelen Strecke zu vergleichen, welche uns als Maafseinheit, deren Länge als Repräsentant der absoluten Einheit gilt. Eine solche Strecke nennen wir Einheitsstrecke, Streckeneinheit. Bezeichnen wir die zu α gehörende Streckeneinheit mit ε, die Länge der ersteren mit a, so ist

$$\alpha = a\varepsilon, \quad a = \frac{\alpha}{\varepsilon}.$$

Die Länge einer Strecke ist gleich dem Quotienten aus ihr und ihrer Streckeneinheit. Gewöhnlich bezeichnen wir die Längenzahlen der Strecken $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ mit $a, b, c, \ldots$ Bestehen die Gleichungen

$$\alpha = a\varepsilon, \quad \beta = \pm b\varepsilon,$$

so ist

$$\frac{\alpha}{a} = \varepsilon, \quad \pm\frac{\beta}{b} = \varepsilon,$$

daher ist

$$\frac{\alpha}{a} = \pm \frac{\beta}{b}, \quad b\alpha = \pm a\beta, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \pm \frac{a}{b}.$$

Gleichartige Strecken lassen sich sämtlich mittelst Zahlen aus ein und derselben Einheitsstrecke numerisch ableiten. Besteht zwischen zwei Strecken eine Gleichung oder eine Zahlbeziehung, so sind sie gleichartige Strecken.

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt noch

$$\alpha + \beta = a\varepsilon \pm b\varepsilon = (a \pm b)\varepsilon,$$
$$\alpha - \beta = a\varepsilon \mp b\varepsilon = (a \mp b)\varepsilon.$$

§ 3. Multiplikation und Division von Streckensummen mit Zahlen.

Sind α und β beliebige Strecken, ist

$$\alpha \pm \beta = \gamma,$$

so ergiebt sich nach den allgemeinen Gesetzen für die Multiplikation und Division unmittelbar, dafs, unter m irgend eine reelle Zahl verstanden,

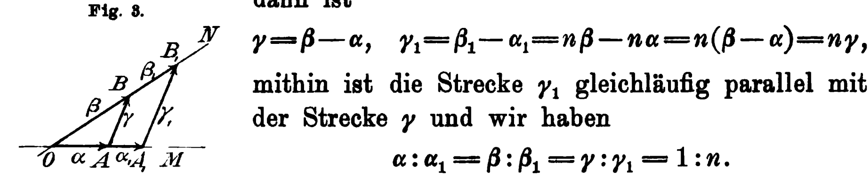
$$m(\alpha \pm \beta) = m\alpha \pm m\beta = m\gamma,$$
$$(\alpha \pm \beta)m = \alpha m \pm \beta m = \gamma m,$$
$$\frac{1}{m}(\alpha \pm \beta) = \frac{1}{m}\alpha \pm \frac{1}{m}\beta = \frac{1}{m}\gamma$$
$$= \frac{\alpha}{m} \pm \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{m},$$
$$(\alpha \pm \beta)\frac{1}{m} = \frac{\alpha}{m} \pm \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{m}$$

ist, und es läfst sich die Bedeutung einer jeden dieser Gleichungen leicht in Worte fassen.

§ 4. Numerische Ableitung von Strecken aus gegebenen Strecken.

1) Seien OM und ON (Fig. 3) zwei im Punkte O sich schneidende gerade Linien. Machen wir auf der ersten $\overline{OA} = \alpha$, $\overline{OA_1} = \alpha_1 = n\alpha$, auf der zweiten $\overline{OB} = \beta$, $\overline{OB_1} = \beta_1 = n\beta$, setzen $\overline{AB} = \gamma$, $A_1B_1 = \gamma_1$, dann ist

Fig. 3.



$$\gamma = \beta - \alpha, \quad \gamma_1 = \beta_1 - \alpha_1 = n\beta - n\alpha = n(\beta - \alpha) = n\gamma,$$

mithin ist die Strecke γ_1 gleichläufig parallel mit der Strecke γ und wir haben

$$\alpha : \alpha_1 = \beta : \beta_1 = \gamma : \gamma_1 = 1 : n.$$

In den Dreiecken OAB und OA_1B_1 sind die gleichnamigen Seiten parallel und stehen in demselben Verhältnisse. Zwei Dreiecke, bei denen solches der Fall ist, nennen wir ähnliche Dreiecke.

2) Seien α, β und γ irgend drei ungleichartige Strecken in einer Ebene, von denen keine ihren Wert ändert, wenn wir jede parallel mit sich selbst so verschieben, dafs sämtliche einen beliebigen Punkt O der Ebene als Anfangselement besitzen. Sei $\overline{OA} = \alpha$, $\overline{OB} = \beta$, $\overline{OC} = \gamma$ (Fig. 4). Zerlegen wir $\overline{OC}$ parallel zu α und β in die Posten $\overline{OA_1}$ und $\overline{OB_1}$, dann liegen $\overline{OA}$ und $\overline{OA_1}$, $\overline{OB}$ und $\overline{OB_1}$ je in einer geraden Linie, es ist deshalb $\overline{OA_1} = p\overline{OA}$, $\overline{OB_1} = q\overline{OB}$, mithin ist

Fig. 4.

$$\overline{OC} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1} = p\overline{OA} + q\overline{OB},$$

oder es ist

$$\gamma = p\alpha + q\beta, \quad p\alpha + q\beta - \gamma = 0.$$

Wäre noch gefunden worden

$$\gamma = p'\alpha + q'\beta,$$

dann müfste sein

$$p'\alpha + q'\beta = p\alpha + q\beta, \quad \text{oder} \quad (p' - p)\alpha + (q' - q)\beta = 0,$$

und weil α und β ungleichartige Strecken sind, so ist diese Gleichung nur dann möglich, wenn

$$p' - p = 0, \quad q' - q = 0, \quad \text{oder} \quad p' = p, \quad q' = q$$

ist. Wäre solches nicht der Fall, dann müfste

$$(p' - p)\alpha = -(q' - q)\beta,$$

also α parallel β sein.

Weil α, β und γ beliebige ungleichartige komplanare Strecken sind, so lehrt diese Betrachtung:

Alle Strecken einer Ebene lassen sich aus irgend zwei ungleichartigen Strecken derselben numerisch ableiten und zwar jede nur auf eine Weise. Existiert zwischen drei Strecken eine Zahlbeziehung, so liegen sie in einer Ebene oder sind einer Ebene parallel.

Sind α und β ungleichartige Strecken von gleichen Längen, gelten sie als Maafse der Linien OA und OB, so ist mit $\alpha = \varepsilon_1$, $\beta = \varepsilon_2$

$$\gamma = p\varepsilon_1 + q\varepsilon_2,$$

wenn γ eine unbestimmte Strecke der Ebene ist

$$\gamma = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2,$$

und wir nennen x und y die Koordinaten des Endpunktes von γ bezüglich der mit ε_1 und ε_2 zusammenfallenden Geraden als Richtlinien

oder Axen, den Schnittpunkt dieser Axen Koordinatenursprung, ferner heifsen die Strecken $x\varepsilon_1$ und $y\varepsilon_2$ die Koordinatenstrecken des Punktes C.

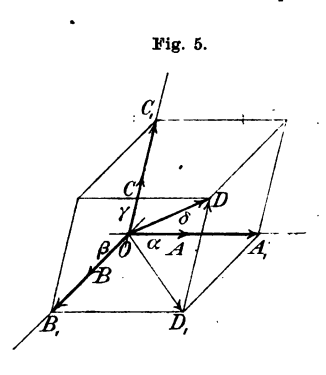


Fig. 5.

3) Seien $\overline{OA}=\alpha$, $\overline{OB}=\beta$, $\overline{OC}=\gamma$, $\overline{OD}=\delta$ (Fig. 5) vier beliebige Strecken des Raumes, von denen keine je drei derselben in einer Ebene liegen. Die Strecke $\overline{OD}=\delta$ zerlegen wir in ihre Posten parallel zu den Geraden OA, OB und OC. Dieses kann dadurch geschehen, dafs wir durch D zu OC einen Parallelstrahl ziehen, welcher in D_1 die durch $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ bestimmte Ebene schneidet, hierauf $\overline{OD_1}$ in die Posten $\overline{OA_1}$ und $\overline{OB_1}$ parallel $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ zerfällen und $\overline{OC_1}=\overline{D_1D}$ nehmen. Alsdann ist

$$\overline{OD}=\overline{OD_1}+\overline{D_1D}=\overline{OA_1}+\overline{OB_1}+\overline{OC_1}.$$

Nun lassen sich aber die Zahlen p, q, r stets so bestimmen, dafs $\overline{OA_1}=p\overline{OA}$, $\overline{OB_1}=q\overline{OB}$, $\overline{OC_1}=r\overline{OC}$, mithin

$$\overline{OD}=p\overline{OA}+q\overline{OB}+r\overline{OC}$$

wird, d. h. es ist dann

$$\delta=p\alpha+q\beta+r\gamma. \tag{1}$$

Wäre anderweitig gefunden worden

$$\delta=p'\alpha+q'\beta+r'\gamma,$$

dann müfste die Gleichung

$$(p'-p)\alpha+(q'-q)\beta+(r'-r)\gamma=0$$

existieren. Sind nun α, β und γ nicht gleich Null und auch nicht einander parallel, so wird dieser Gleichung genügt, wenn

$$p'=p,\quad q'=q,\quad r'=r$$

ist. Aber diese Relation wird auch erfüllt, wenn die Summe der Vielfachen von α, β und γ gleich Null ist, wenn zwischen diesen Vielfachen eine Zahlbeziehung besteht. Dann liegen die letzteren Strecken in einer Ebene, oder sind einer Ebene parallel und jede aus ihnen abgeleitete Strecke ist ebenfalls dieser Ebene parallel. Mithin kann eine beliebige Strecke des Raumes aus α, β und γ nur dann numerisch abgeleitet werden, wenn sie nicht einer Ebene parallele Strecken sind, und zwar nur auf einerlei Weise.

Jede Strecke des Raumes läfst sich aus irgend drei

Strecken, die nicht einer Ebene parallel sind, mittelst Zahlen und zwar nur auf einerlei Weise ableiten.

Die Gleichung (1) kann geschrieben werden

$$p\alpha + q\beta + r\gamma - \delta = 0,$$

multiplizieren wir sie mit s, setzen sodann $sp = p_1$, $sq = q_1$, $sr = r_1$, $s = - s_1$, so ergiebt sich

$$p_1\alpha + q_1\beta + r_1\gamma + s_1\delta = 0,$$

$$\delta = -\frac{1}{s_1}(p_1\alpha + q_1\beta + r_1\gamma).$$

Existiert zwischen vier Strecken eine Zahlbeziehung, so liegen sie im allgemeinen nicht in einer Ebene und jede derselben läſst sich aus den drei übrigen numerisch ableiten.

Sind ε_1, ε_2, ε_3 und ε die Einheitsstrecken von α, β, γ und δ resp., dann ist

$$\delta = d\varepsilon = pa\varepsilon_1 + qb\varepsilon_2 + rc\varepsilon_3,$$

und wir dürfen auch setzen

$$\delta = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$(x - pa)\varepsilon_1 + (y - qb)\varepsilon_2 + (z - rc)\varepsilon_3 = 0,$$

woraus hervorgeht, daſs

$$x = pa, \quad y = qb, \quad z = rc$$

ist, und nennen wir die Zahlen x, y und z die Koordinaten des Endpunktes von δ bezüglich der mit α, β und γ zusammenfallenden Geraden als Richtlinien der Koordinatenstrecken $x\varepsilon_1$, $y\varepsilon_2$ und $z\varepsilon_3$, den Schnittpunkt O dieser Geraden den Ursprung des Richtsystems.

Sind δ und δ' die Träger der Punkte D und D', so ist mit

$$\delta = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3, \quad \delta' = x'\varepsilon_1 + y'\varepsilon_2 + z'\varepsilon_3$$

die Strecke $\overline{DD'} = \zeta$ durch die Gleichung

$$\zeta = \delta' - \delta = (x' - x)\varepsilon_1 + (y' - y)\varepsilon_2 + (z' - z)\varepsilon_3$$

gegeben.

Befinden sich die Strecken δ und δ' in der durch ε_1 und ε_2 bestimmten Ebene, so ist $z = z' = 0$ und demnach dann

$$\zeta = \delta' - \delta = (x' - x)\varepsilon_1 + (y' - y)\varepsilon_2.$$

§ 5. Anwendung der entwickelten Sätze.

Bereits das Summationstheorem der Strecken an sich ist für die Geometrie fruchtbringend, wovon wir einige Beispiele geben wollen.

1) Sei U der Schnittpunkt der Diagonalen des Parallelogrammes $ABCD$ (Fig. 6), $\overline{AB} = \overline{DC} = \alpha$, $\overline{AD} = \overline{BC} = \beta$, dann ist

Fig. 6.

$$\overline{AU} = x(\alpha + \beta), \quad \overline{UB} = y(\alpha - \beta),$$

denn es sind $\overline{AU}$ und $\overline{UB}$ gewisse Vielfachen der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{DB}$ resp. Aber es ist

$$\overline{AU} + \overline{UB} + \overline{BA} = 0,$$

mithin ist

$$x(\alpha + \beta) + y(\alpha - \beta) - \alpha = 0,$$

oder

$$(x + y - 1)\alpha + (x - y)\beta = 0,$$

welche Gleichung, weil weder α noch β verschwindende Gröfsen sind, nur dann befriedigt werden kann, wenn

$$x + y - 1 = 0 \quad \text{und} \quad x - y = 0$$

ist, woraus folgt

$$x = y = \frac{1}{2},$$

daher ist

$$\overline{AU} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}\overline{AC}, \quad \overline{UB} = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}\overline{DB},$$

d. h. U ist Halbierungspunkt der beiden Diagonalen des Parallelogrammes, die Diagonalen eines Spatheckes halbieren sich gegenseitig.

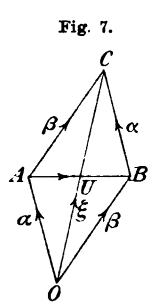


Fig. 7.

2) Seien A, B und O (Fig. 7) drei nicht in gerader Linie liegende Punkte, sei $\overline{OA} = \alpha$, $\overline{OB} = \beta$ und sei der Träger $\overline{OU} = \xi$ des Mittelpunktes U der Strecke $\overline{AB}$ zu bestimmen.

Weil $\overline{AU} = \overline{UB}$ sein mufs und $\overline{AU} = \xi - \alpha$, $\overline{UB} = \beta - \xi$ ist, so erhalten wir

$$\xi - \alpha = \beta - \xi,$$

woraus folgt

$$2\xi = (\alpha + \beta), \quad \xi = \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Zeichnen wir daher $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \alpha + \beta = 2\xi$, so ist der Schnittpunkt von $\overline{AB}$ und $\overline{OC}$ der fragliche Punkt U, denn es ist

$$\overline{OU} = \overline{UC} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Ergänzen wir die Figur durch die Strecke $\overline{BC}$ zu dem Spathecke $OACB$, so wird U der Schnittpunkt seiner Diagonalen $\overline{AB}$ und $\overline{OC}$,

woraus hervorgeht, dafs die Diagonalen eines Parallelogrammes sich gegenseitig halbieren.

3) Streckengleichungen der geraden Linie.

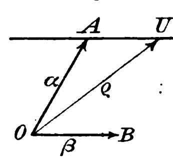
a) Sei OU eine durch den Punkt O gehende gerade Linie, U ein beliebiger Punkt derselben, α eine mit ihr gleichartige, gegebene Strecke, etwa $\overline{OA} = \alpha$. Dann ist $\overline{OU}$ ein gewisses Vielfaches von $\overline{OA}$, also $\overline{OU} = u\overline{OA}$, wo u eine gewisse reelle Zahl bedeutet. Nehmen wir nun $\overline{OU} = \varrho$, dann ist

$$\varrho = u\alpha \tag{1}$$

die Streckengleichung der Geraden OU bei variablen u, welche zu α parallel ist. Denn lassen wir u alle Zahlwerte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ durchlaufen, so beschreibt der Punkt U die gerade Linie OU. Weil α eine Strecke von beliebiger Länge ist, so gilt die Gleichung auch, wenn α Einheitsstrecke ist.

b) Sei AU eine gerade Linie, welche durch den Endpunkt der Strecke $\overline{OA} = \alpha$ geht und parallel zu der Strecke $\overline{OB} = \beta$ ist (Fig. 8).

Fig. 8.



Setzen wir den Fahrstrahl des beliebigen Punktes U der geraden Linie, die Strecke $\overline{OU} = \varrho$, so ist, wegen

$$\overline{OU} = \overline{OA} + \overline{AU} = \overline{OA} + u\overline{OB},$$

$$\varrho = \alpha + u\beta. \tag{2}$$

Diese Gleichung ist bei variablem u eine Streckengleichung der geraden Linie, welche durch den Endpunkt von α geht und zu der Strecke β parallel ist.

c) Zwei Punkte A und B bestimmen eine gerade Linie, die Träger dieser Punkte bezüglich eines nicht in dieser Geraden liegenden Punktes O seien $\overline{OA} = \alpha$, $\overline{OB} = \beta$ (Fig. 9). Ist nun U ein beliebiger Punkt des Strahles AB, $\overline{OU} = \varrho$, dann ist

Fig. 9.

$$\overline{OU} = \overline{OA} + \overline{AU} = \overline{OA} + u\overline{AB}$$
$$= \overline{OA} + u(\overline{OB} - \overline{OA}),$$

d. i.

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \alpha + u(\beta - \alpha), \\ \text{oder} \quad \varrho &= (1 - u)\alpha + u\beta. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Aber es ist auch

$$\overline{OU} = \overline{OB} + \overline{BU} = \overline{OB} + v\overline{BU} = \overline{OB} + v(\overline{OA} - \overline{OB}),$$

d. h.

$$\varrho = \beta + v(\alpha - \beta), \quad \text{oder} \quad \varrho = v\alpha + (1 - v)\beta. \tag{3'}$$

Die Gleichungen (3) und (3′) sind bei variablem u und v Streckengleichungen der durch die Punkte A und B bestimmten geraden Linie. Mit $v = (1 - u)$ geht die (3′) in die (3), mit $u = (1 - v)$ die (3) in die (3′) über.

Die Gleichung (3) läfst sich schreiben

$$(1 - u)\alpha + u\beta - \varrho = 0, \quad \text{oder} \quad (1 - u)\alpha + u\beta - 1\varrho = 0,$$

die Summe der Koeffizienten an den Strecken auf ihrer rechten Seite verschwindet, die Endelemente dieser Strecken liegen stets in einer geraden Linie. Setzen wir

$$1 - u = -\frac{m}{p}, \quad u = \frac{m+p}{p} = -\frac{n}{p},$$

so ergiebt sich

$$m\alpha + n\beta + p\varrho = 0, \quad m + n + p = 0. \tag{4}$$

„Besteht zwischen drei Strecken eine Zahlbeziehung und ist die Summe ihrer Koeffizienten gleich Null, so sind sie komplanar und ihre Endpunkte liegen, wenn sie ein gemeinsames Anfangselement besitzen, in einer geraden Linie. Daher ist die Streckengleichung (4) diejenige der durch die Endpunkte von α und β gehenden Geraden, wenn α und β ein gemeinsames Anfangselement besitzen und die Summe der Koeffizienten sämtlicher Strecken verschwindet."

d) Sind ε_1, ε_2, ε_3 drei im Punkte O entspringende, in keiner Zahlbeziehung stehende Einheitsstrecken, so können wir setzen

$$\varrho = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3, \quad \alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3, \quad \beta = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3.$$

Mit diesen Streckenwerten geht die Gleichung (1) über in

$$x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3 = u(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3),$$

oder in

$$(x - ua_1)\varepsilon_1 + (y - ua_2)\varepsilon_2 + (z - ua_3)\varepsilon_3 = 0,$$

welche Gleichung nur dann befriedigt werden kann, wenn

$$x = ua_1, \quad y = ua_2, \quad z = ua_3$$

ist, und eliminieren wir aus diesen drei Gleichungen die Variable u, so gelangen wir zu

$$\frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2} = \frac{z}{a_3},$$

welche die Koordinatengleichungen der durch den Koordinatenursprung und den Punkt A, dessen Koordinaten a_1, a_2 und a_3 sind, gehenden geraden Linie sind.

Die Substitution der obigen Werte in die Gleichung (2), nachdem wir sie auf die Form

$$\varrho - \alpha - u\beta = 0$$

gebracht haben, giebt

$$(x - a_1 - ub_1)\varepsilon_1 + (y - a_2 - ub_2)\varepsilon_2 + (z - a_3 - ub_3)\varepsilon_3 = 0,$$

woraus hervorgeht, dafs die Koordinaten eines beliebigen Punktes des Strahles

$$x = a_1 + ub_1, \quad y = a_2 + ub_2, \quad z = a_3 + ub_3$$

sind, und durch Elimination von u erhalten wir hieraus

$$\frac{x - a_1}{b_1} = \frac{y - a_2}{b_2} = \frac{z - a_3}{b_3},$$

die gewöhnlichen Koordinatengleichungen einer geraden Linie, welche durch einen gegebenen Punkt geht und zu einer gegebenen Richtung parallel ist.

Nehmen wir dieselben Substitutionen in der Gleichung (3) vor, so ergiebt sich

$$\{x - a_1 - u(b_1 - a_1)\}\varepsilon_1 + \{y - a_2 - u(b_2 - a_2)\}\varepsilon_2 \\ + \{z - a_3 - u(b_3 - a_3)\}\varepsilon_3 = 0,$$

woraus folgt

$$x = a_1 + u(b_1 - a_1), \quad y = a_2 + u(b_2 - a_2), \quad z = a_3 + u(b_3 - a_3),$$

und durch Elimination der Grundvariablen u ergiebt sich hieraus

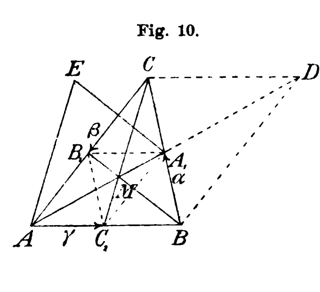
$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3},$$

und das sind die gewöhnlichen Koordinatengleichungen der durch die gegebenen Punkte $A(a_1, a_2, a_3)$ und $B(b_1, b_2, b_3)$ gehenden geraden Linie.

Liegt die gerade Linie in einer, etwa in der durch ε_1 und ε_2 bestimmten Ebene, so ist $a_3 = b_3 = z = 0$.

4) „Ziehen wir von den Eckpunkten eines Dreiecks nach den Mittelpunkten der ihnen gegenüber liegenden Seiten des Dreiecks Strecken, so schneiden sich diese in einem Punkte und teilen sich einander so, dafs sich ihre Stücke wie 2 : 1 verhalten."

Fig. 10.



a) Sei ABC (Fig. 10) irgend ein Dreieck, seien A_1, B_1, C_1 die Mittelpunkte seiner Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ resp. Sei M der Schnittpunkt der Strecken $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$, $\overline{BA_1} = \overline{A_1C} = \alpha$, $\overline{CB_1} = \overline{B_1A} = \beta$. Dann ist

$$\overline{BA} = \overline{BC} + \overline{CA} = 2(\alpha + \beta),$$

$$\overline{A_1B_1} = \overline{A_1C} + \overline{CB_1} = \alpha + \beta = \frac{1}{2}\overline{BA},$$

so dafs $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{BA}$ parallele Strecken sind und letztere doppelt so lang als erstere ist. Nun ist

$$\overline{BM}+\overline{MA}=\overline{BA}=2\overline{A_1B_1}=2(\overline{A_1M}+\overline{MB_1}),$$

aber $\overline{BM}$ und $\overline{MB_1}$, sowie $\overline{MA}$ und $\overline{A_1M}$ sind gleichartige Strecken, mithin ist

$$\overline{BM}=2\overline{MB_1},\quad \overline{MA}=2\overline{A_1M},$$

ferner haben wir

$$\overline{BB_1}=\overline{BM}+\overline{MB_1}=3\overline{MB_1},\quad \overline{A_1A}=\overline{A_1M}+\overline{MA}=3\overline{A_1M},$$

mithin erhalten wir

$$\overline{BM}=\tfrac{2}{3}\overline{BB_1}=\tfrac{2}{3}(2\alpha+\beta),$$

$$\overline{AM}=\tfrac{2}{3}\overline{AA_1}=\tfrac{2}{3}(\overline{AB}+\overline{BA_1})=-\tfrac{2}{3}(\alpha+2\beta).$$

Weiter ergiebt sich

$$\overline{CM}=\overline{CA_1}+\overline{A_1M}=\tfrac{2}{3}(\beta-\alpha),$$

$$\overline{CC_1}=\overline{CA}+\overline{AC_1}=\overline{CA}+\tfrac{1}{2}\overline{AB}=\beta-\alpha.$$

Mithin sind $\overline{CM}$ und $\overline{CC_1}$ gleichartige Strecken, welche, weil sie den Punkt C gemeinsam besitzen, zusammenfallen, so dafs auch die Strecke $\overline{CC_1}$ durch den Punkt M geht. Noch erhalten wir

$$\overline{A_1C_1}=\overline{A_1B}+\overline{BC_1}=-\alpha+(\beta+\alpha)=\beta,$$

$$\overline{B_1C_1}=\overline{B_1A}+\overline{AC_1}=\beta-(\alpha+\beta)=-\alpha,$$

und weil

$$\overline{A_1B_1}=\tfrac{1}{2}\overline{BA}=(\alpha+\beta)$$

ist, so sind die Seiten $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$ und $\overline{C_1A_1}$ des Dreiecks der Punkte A_1, B_1, C_1 parallel zu den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, und $\overline{CA}$ resp. des Dreiecks der Punkte A, B, C und von der halben Länge als diese.

b) Setzen wir noch $\overline{AB}=2\gamma$, so sind die Gleichungen der Geraden AA_1, BB_1 und CC_1 mit A als Beziehungspunkt, und wenn wir bedenken, dafs $\overline{AA_1}$ mit der Diagonale des Parallelogrammes $CABD$ zusammenfällt,

$$\varrho_1=t(\gamma-\beta),\quad \varrho_2=2\gamma+u(2\gamma+\beta),\quad \varrho_3=-2\beta+v(\gamma+2\beta).$$

Für den Schnittpunkt M der beiden letzten Geraden mufs, wenn $\overline{AM}=\varrho_0$ genommen wird,

$$\varrho_2=\varrho_3=2(1+u)\gamma+u\beta=v\gamma-2(1-v)\beta=\varrho_0$$

sein, so dafs bezüglich dieses Punktes für die Koeffizienten u und v die Gleichungen

$$2(1+u)=v,\quad u=2(v-1)$$

bestehen, aus welchen

$$u=-\frac{2}{3},\quad v=\frac{2}{3}$$

folgt, und mit diesen Werten ergiebt sich sowohl aus der zweiten, als auch aus der dritten Streckengleichung

$$\varrho_0=\frac{2}{3}(\gamma-\beta).$$

Beachten wir jetzt die erste Streckengleichung, so zeigt es sich, dafs der Fahrstrahl des Punktes M mit der Geraden AA_1 zusammenfällt, daher schneiden sich die Strecken $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$ in einem Punkte.

Nun ist

$$\overline{AA_1}=\frac{1}{2}\overline{AD}=(\gamma-\beta),$$

daher

$$\varrho_0=\overline{AM}=\frac{2}{3}\overline{AA_1},\quad \overline{MA_1}=\frac{1}{3}\overline{AA_1},\quad \overline{AM}:\overline{MA_1}=2:1;$$

ferner ist

$$\overline{BB_1}=-(2\gamma+\beta),$$

$$\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}+\overline{A_1M}=-\frac{2}{3}(2\gamma+\beta)=\frac{2}{3}\overline{BB_1},\qquad \overline{MB_1}=\frac{1}{3}\overline{BB_1},$$

$$\overline{BM}:\overline{MB_1}=2:1,$$

endlich haben wir

$$\overline{CC_1}=2\beta+\gamma,$$

$$\overline{CM}=\overline{CB_1}+\overline{B_1M}=\frac{2}{3}(2\beta+\gamma)=\frac{2}{3}\overline{CC_1},\quad \overline{MC_1}=\frac{1}{3}\overline{CC_1},$$

$$\overline{CM}:\overline{MC_1}=2:1.$$

Noch erhalten wir

$$\overline{C_1A_1}=\overline{AA_1}-\overline{AC_1}=-\quad\beta=\frac{1}{2}\overline{AC},$$

$$\overline{A_1B_1}=\overline{AB_1}-\overline{AA_1}=-\quad\gamma=\frac{1}{2}\overline{BA},$$

$$\overline{B_1C_1}=\overline{AC_1}-\overline{AB_1}=\beta+\gamma=\frac{1}{2}\overline{CB},$$

so dafs die Seiten $\overline{C_1A_1}$, $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{B_1C_1}$ des Dreiecks der Punkte C_1, A_1, B_1 den Seiten $\overline{AC}$, $\overline{BA}$ und $\overline{CB}$ des Dreiecks der Punkte A, B, C parallel und von der halben Länge derselben sind. Es ist, wie dem sein mufs,

$$\overline{C_1A_1}+\overline{A_1B_1}+\overline{B_1C_1}=-\beta-\gamma+\beta+\gamma=0.$$

Für die Mittellinien des Dreiecks ABC haben wir die Relationen

$$\overline{AA_1} = \gamma - \beta, \quad \overline{BB_1} = -(2\gamma + \beta), \quad \overline{CC_1} = 2\beta + \gamma,$$

so dafs ihre Summe

$$\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = 0$$

ist, weshalb wir aus diesen Strecken drei Dreiecke herstellen können. Mit $\overline{A_1E} = \overline{BB_1}$ ist $\overline{EA} = \overline{CC_1}$ und die Figur AA_1E eines dieser Dreiecke, die beiden anderen Dreiecke folgen aus $\overline{BB_1} + \overline{AA_1} + \overline{CC_1} = 0$ und $\overline{CC_1} + \overline{AA_1} + \overline{BB_1} = 0$.

Weitere Anwendungen des Additionstheorems der Strecken findet der Leser in den Elementen der Quaternionen von Kelland (*Introduction to Quaternions*, by *P. Kelland*, London 1873), Seite 9—31. Weil dasselbe allein kompliziertere Aufgaben meistens nur umständlich zu lösen imstande ist, und es vorerst nur darauf ankommt, mit der Addition von Strecken etwas vertraut zu werden, genügen bereits die gegebenen Beispiele.

Zweiter Abschnitt.

Die Summation von Punktgröfsen.

§ 6. Die Punktgröfse.

Unter einem einfachen geometrischen Punkte verstehen wir den geometrischen Punkt so, wie wir ihn in der Einleitung definiert haben, er ist dasjenige geometrische Element, welches keine Ausdehnung besitzt. Fallen 2, 3, ... n solche Punkte zusammen, so bildet die Gesamtheit dieser Punkte einen zweifachen, dreifachen, ... $n$fachen Punkt, eine Punktgröfse, welche wir, wenn A den einfachen Punkt bezeichnet, durch nA darstellen.

Einfache Punkte und späterhin auch Punktgröfsen bezeichnen wir stets durch Buchstaben des grofsen lateinischen Alphabetes.

Verstehen wir unter m irgend eine reelle Zahl, so ist mA irgend ein Vielfaches des Punktes A, und wenn wir diese Punktgröfse mit $\dot{A}$ bezeichnen, so ist

$$\dot{A} = mA,$$

d. h. die Punktgröfse $\dot{A}$ ist aus dem Punkte A durch die Zahl m numerisch abgeleitet und diese zwei geometrischen Gebilde fallen zu-

sammen. Den Koeffizienten m nennen wir die Wertigkeit oder das Gewicht der Punktgröfse $\dot{A}$, mit $m = 1$ wird die Punktgröfse zu einem Punkte vom Gewichte Eins, zu einem einfachen Punkte.

Der Inbegriff aller aus einem einfachen Punkte ableitbaren Gröfsen (Punktgröfsen) heifst dessen Gebiet, dasselbe fällt räumlich mit diesem einfachen Punkte zusammen, so dafs jedem einfachen Punkte ein besonderes, ihm angehörendes Gebiet entspricht. Zwischen zwei verschiedenen Punktgebieten giebt es daher kein ihnen gemeinsames Gebiet, das aus ihren Grundpunkten ableitbare Gebiet nennen wir ihr verbindendes Gebiet.

Gehören $\dot{A}$ und $\dot{B}$ dem Gebiete des Punktes E an, ist

$$\dot{A} = aE, \quad \dot{B} = bE,$$

dann ist

$$\dot{A} \pm \dot{B} = aE \pm bE = (a \pm b)E,$$

$$\frac{\dot{A}}{\dot{B}} = \frac{aE}{bE} = \frac{a}{b}\frac{E}{E} = \frac{a}{b},$$

denn es ist

$$E = 1 \cdot E, \quad \text{also } E : E = 1;$$

ferner erhalten wir

$$E = \frac{\dot{A}}{a} = \frac{\dot{B}}{b}, \quad b\dot{A} - a\dot{B} = 0,$$

$$\dot{A} = \frac{a}{b}\dot{B}, \quad \dot{B} = \frac{b}{a}\dot{A}.$$

Die Summe und die Differenz aus zwei gleichnamigen Punktgröfsen ist eine dritte gleichnamige Punktgröfse. Der Quotient aus zwei Punktgröfsen, welche demselben Gebiete angehören, ist eine Zahl. Zwischen zwei gleichnamigen Punktgröfsen besteht stets eine Zahlbeziehung. Jede Gröfse im Gebiete eines Punktes kann anstatt aus diesem Punkte auch aus jeder anderen Gröfse desselben Gebietes numerisch abgeleitet werden.

Mit $a = b$ erhalten wir

$$\dot{A} = aE, \quad \dot{B} = aE,$$

d. h.

$$\dot{A} = \dot{B}, \quad \dot{A} - \dot{B} = 0.$$

Sind die Gewichte zweier Punktgröfsen in demselben Gebiete einander gleich, so sind diese Punktgröfsen sich selbst gleich und ihr Unterschied verschwindet.

§ 7. Punkt und Strecke.

Für die Addition von Punkten haben die in der Einleitung entwickelten Gesetze der einfachsten Verknüpfungsart zu gelten. Weil hiernach

$$A - A + B = B$$

ist, so ist auch

$$A + (B - A) = B.$$

Diese Gleichung sagt aus, dafs der Punkt A in den Punkt B übergeht, wenn wir ihn additiv mit der Punktdifferenz $(B - A)$ verknüpfen. Die Punkte A und B sind zugleich die Grenzelemente der Strecke $\overline{AB}$. Der Punkt A fällt mit dem Punkte B zusammen, wenn er um die Strecke $\overline{AB}$ verschoben wird. Daher kann gesetzt werden

$$(B - A) = \overline{AB} = \alpha$$

und es ist dann

$$A + \alpha = B, \quad A = B - \alpha, \quad B = A + \alpha.$$

Die Differenz aus zwei Punkten ist gleich der durch sie bestimmten Strecke in dem Sinne vom Subtrahenden nach dem Minuenden. Die Summe aus einem Punkte und einer Strecke ist äquivalent dem Endpunkte dieser Strecke, wenn ihr Anfangselement mit dem ersteren Punkte zusammenfällt. Der mit dem Anfangselemente einer Strecke koinzidierende Punkt ist gleich der Differenz aus dem mit ihrem Endelemente zusammenfallenden Punkte und dieser Strecke. Der mit dem Endpunkte einer Strecke zusammenfallende Punkt ist der Summe aus dem mit ihrem Anfangselemente koinzidierenden Punkte und ihr selbst äquivalent.

Die Strecke α kann stets als eine Summe von Strecken, etwa als eine solche aus drei Strecken, angesehen werden, setzen wir

$$\alpha = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_3,$$

dann wird

$$A + \alpha = A + a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_3 = B,$$

$$a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_3 = B - A.$$

Die Summe aus einem Punkte und einer Streckenfolge ist der Endpunkt des in diesem Punkte beginnenden Summationspolygons der Streckenposten. Die Summe einer Streckenfolge bezüglich eines gegebenen Anfangspunktes ist gleich dem Unterschiede aus dem Endpunkte und dem Anfangspunkte der Schlufslinie des Summationspolygons.

Durch den gegebenen Anfangspunkt erlangt eine Summe von Strecken eine bestimmte Lage im Raume.

Aus der Gleichung

$$B - A = \alpha$$

folgt, wenn wir ihre Seiten mit der beliebigen reellen Zahl m multiplizieren:

$$m(B - A) = m\alpha, \quad mB - mA = \gamma,$$

wenn wir $m\alpha = \gamma$ setzen, und hieraus geht hervor

$$mA + \gamma = mB, \quad B - A = \frac{1}{m}\gamma.$$

Der Unterschied aus zwei Punktgröfsen mit gleichen Gewichten, welche verschiedenen Gebieten angehören, ist gleich der mit diesem Gewichte vervielfachten Strecke zwischen den Grundpunkten dieser Gebiete im Sinne vom Subtrahenden zum Minuenden. Die Summe einer Punktgröfse und einer Strecke ist äquivalent einer gleichwertigen Punktgröfse, welche zum Gebiete des Endpunktes der durch ihr Gewicht geteilten Strecke gehört, wobei das Anfangselement der letzteren mit dem ersten Posten der Summe zusammenfällt.

Die Abweichung eines Punktes B von einem Punkte A ist gleich der durch diese Punkte bestimmten Strecke in dem Sinne vom zweiten nach dem ersten Punkte. Die Abweichung, der Unterschied der Grundpunkte zweier gleichwertiger Punktgröfsen verschiedener Gebiete ist gleich dem durch das gemeinsame Gewicht beider Gröfsen geteilten Unterschiede derselben, vorausgesetzt, dafs der Koeffizient einen geltenden Wert hat.

§ 8. Die Summation von Punktgröfsen.

Eine Reihe zusammengehörender im Raume oder in einer Ebene beliebig gelegener Punktgröfsen nennen wir einen Punktverein oder ein Punktsystem.

Weil Gleiches zu Gleichem addiert Gleiches giebt, so wird die Summe der Punktgröfsen eines Punktvereins eine gewisse Punktgröfse sein.

Sind aA, bB, cC, dD, ... die zu addierenden Punktgröfsen, ist xS das näher zu bestimmende Ergebnis, so mufs die Gleichung

$$aA + bB + cC + dD + \cdots = xS \qquad (1)$$

bestehen. Ist R ein beliebiger, im Endlichen gelegener Punkt des Raumes, so läfst sich setzen

$$A = A + R - R = R + A - R, \quad B = R + B - R, \cdots,$$

welche Werte, in die Gleichung (1) substituiert, geben

$$a[R + (A - R)] + b[R + (B - R)] + c[R + (C - R)] + \cdots = xS,$$

oder

$$(a + b + c + \cdots)R + a(A - R) + b(B - R) + c(C - R) + \cdots = xS. \quad (2)$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden, es ist entweder die Summe der Koeffizienten der Punktgröfsen des Vereins ungleich, oder gleich Null.

1) $a + b + c + \cdots = s \gtrless 0$. Die Gleichung (2) können wir schreiben

$$s\left\{R + \frac{a(A - R) + b(B - R) + c(C - R) + \cdots}{s}\right\} = xS,$$

woraus folgt

$$R + \frac{a(A - R) + b(B - R) + c(C - R) + \cdots}{s} = \frac{x}{s}S.$$

Die Summe auf der linken Seite dieser Gleichung ist ein einfacher Punkt, daher mufs auch ihre rechte Seite ein solcher sein, weshalb

$$\frac{x}{s} = 1,$$

oder

$$x = s = a + b + c + \cdots$$

sein mufs, so dafs wir haben

$$aA + bB + cC + \cdots = sS, \quad s = a + b + c \cdots, \quad (3)$$

$$S - R = \frac{a(A - R) + b(B - R) + c(C - R) + \cdots}{s}. \quad (4)$$

Setzen wir in der letzten Gleichung $R = S$, so ergiebt sich

$$S - S = 0 = \frac{a(A - S) + b(B - S) + c(C - S) + \cdots}{s},$$

es ist mithin dann, weil s eine endliche Gröfse ist,

$$0 = a(A - S) + b(B - S) + c(C - S) + \cdots.$$

Soll dieser Gleichung noch ein zweiter Punkt S' genügen, so mufs sein

$$0 = a(A - S') + b(B - S') + c(C - S') + \cdots$$

Durch die Subtraktion der letzten Gleichung von der vorhergehenden erhalten wir

$$0 = (a + b + c + \cdots)(S' - S),$$

und weil die Summe der Koeffizienten nicht verschwinden kann, müssen wir haben

$$0 = S' - S, \quad \text{oder } S' = S.$$

Demnach giebt es nur einen einzigen Summenpunkt, er ist von der Lage des Punktes R unabhängig.

Wählen wir anstatt des Punktes R den Punkt R', so besteht die Gleichung

$$S - R' = \frac{a(A - R') + b(B - R') + c(C - R') + \cdots}{s},$$

addieren wir auf beiden Seiten derselben die Strecke $(R' - R)$, welche der Streckenabstand der Punkte R und R' ist, so folgt die Gleichung (4).

Die Summe der Punktgröfsen eines Punktvereins, deren Koeffizientensumme nicht verschwindet, ist eine Punktgröfse von dieser Koeffizientensumme gleichem Gewichte. Der Abstand des Summenpunktes von einem beliebig gewählten Punkte des Raumes ist gleich der Summe der Abweichungen der Posten von diesem Punkte, dieselbe geteilt durch das Gesamtgewicht der Posten. Es giebt nur einen Summenpunkt, seine Lage ist von dem beliebig angenommenen Punkte des Raumes unabhängig. Die Summe der Abweichungen der Posten vom Summenpunkte verschwindet und keinem zweiten Punkte kommt diese Eigenschaft zu.

2) $a + b + c + \cdots = 0$. Mit diesem Werte von s folgt aus den Gleichungen (3) und (4), weil $0R = 0$ ist, denn R ist ein bestimmter, im Endlichen gelegener Punkt,

$$aA + bB \cdots + kK = a(A-R) + b(B-R) + \cdots + k(K-R) = 0S, \quad (5)$$

und weil, wegen

$$a + b + c + \cdots + k = 0,$$
$$k = -(a + b + c + \cdots + i)$$

ist, so erhalten wir durch Substitution dieses Wertes von k auf der rechten Seite der ersten Gleichung (5)

$$aA + bB + cC + \cdots + kK = a(A-K) + b(B-K) + \cdots + i(J-K) = \gamma = 0S,$$

welches Resultat sich auch mit $R = K$ in (5) ergiebt.

Noch bekommen wir durch (4)

$$S - R = \infty\, \gamma.$$

Die Summe der Punktgröfsen eines Punktvereins, deren Gesamtgewicht verschwindet, ist eine unendlich ferne Punktgröfse vom Gewichte Null. Dieselbe ist äquivalent einer

Strecke von bestimmter Gröfse und bestimmtem Richtungssinn. Diese Strecke ist gleich der Summe der Abweichungen der Posten von irgend einem Punkte des Raumes, von dessen Lage sie unabhängig ist.

Daraus erkennen wir, dafs jeder unendlich ferne Punkt mit dem Gewichte Null durch eine gewisse, im Endlichen gelegene Strecke ersetzt werden kann, dafs jede Strecke im Endlichen auch als Repräsentant einer unendlich fernen Punktgröfse, deren Gewicht verschwindet, angesehen werden darf.

§ 9. Die Summe aus zwei Punktgröfsen. Das aus zwei Punkten ableitbare Gebiet.

Sind $a_1 A_1$ und $a_2 A_2$ zwei Punktgröfsen verschiedener Gebiete, so ist ihre Summe

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 = (a_1 + a_2) S.$$

Für die Abweichungen des Summenpunktes S von den Punkten A_1 und A_2 ergiebt sich, wenn wir in (4) § 8 zuerst $R = A_1$, sodann $R = A_2$ setzen,

$$S - A_1 = \frac{a_2}{a_1 + a_2}(A_2 - A_1), \quad S - A_2 = \frac{a_1}{a_1 + a_2}(A_1 - A_2),$$

und daraus folgt

$$(S - A_1) : (A_2 - S) : (A_2 - A_1) = a_2 : a_1 : (a_1 + a_2).$$

Fig. 11.

Der Summenpunkt S teilt die Strecke $(A_2 - A_1)$ in umgekehrtem Verhältnisse der Koeffizienten der Punktgröfsen, er liegt derjenigen Punktgröfse zunächst, welche das gröfsere Gewicht besitzt. Zeichnen wir (a_1 und $a_2 > 0$ vorausgesetzt) $(B_1 - A_2) = a_1 \varepsilon$, $(B_2 - A_1) = -a_2 \varepsilon$, unter ε irgend eine Strecke verstanden (Fig. 11), und ziehen wir die Gerade $B_1 B_2$, so schneidet sie die Gerade $A_1 A_2$ im Punkte S, denn es ist

$$(S - A_1) : (A_2 - S) = (B_2 - A_1) : (A_2 - B_1) = a_2 : a_1.$$

Mit $a_1 = a_2 = 1$ erhalten wir

$$2S = A_1 + A_2, \quad S = \frac{1}{2}(A_1 + A_2),$$

$$S - A_1 = A_2 - S = \frac{1}{2}(A_2 - A_1).$$

Die Summe aus zwei einfachen Punkten ist ein doppelter Punkt, welcher mit der Mitte der sie verbindenden Strecke zusammenfällt.

Ist einer der Koeffizienten, etwa a_2, negativ, dann haben wir

$$a_1 A_1 - a_2 A_2 = (a_1 - a_2) S,$$

$$S - A_1 = -\frac{a_2}{a_1 - a_2}(A_2 - A_1), \quad S - A_2 = \frac{a_1}{a_1 - a_2}(A_1 - A_2),$$

$$(S - A_1) : (S - A_2) : (A_1 - A_2) = a_2 : a_1 : (a_1 - a_2).$$

Daher liegt der Summenpunkt S, wenn $a_1 > a_2$ ist, auf der Geraden $A_1 A_2$ aufserhalb der Strecke $(A_2 - A_1)$ zunächst dem Punkte A_1, wenn $a_1 < a_2$ ist, aufserhalb der Strecke $(A_2 - A_1)$ und zunächst dem Punkte A_2.

Sind die Gewichte der beiden Punktgröfsen entgegengesetzt gleich, ist $a_1 - a_2 = 0$, so ist

$$0 S = (A_1 - A_2), \quad S - A_1 = \infty (A_2 - A_1), \quad S - A_2 = \infty (A_1 - A_2),$$

mithin ist die Strecke $(A_1 - A_2)$ der unendlich fernen Punktgröfse vom Gewichte Null auf der durch A_1 und A_2 bestimmten Geraden äquivalent.

Sind E_1 und E_2 irgend zwei feste, im Endlichen gelegene Punkte einer geraden Linie, ist S ein beliebiger Punkt derselben, so besteht nach dem Vorigen zwischen diesen Punkten die Beziehung

$$s S = a_1 E_1 + a_2 E_2, \quad s = a_1 + a_2, \tag{1}$$

oder

$$a_1 E_1 + a_2 E_2 - s S = 0, \quad a_1 + a_2 - s = 0,$$

woraus folgt

$$S = \frac{a_1}{s} E_1 + \frac{a_2}{s} E_2.$$

Existiert zwischen drei Punkten eine Zahlbeziehung, so liegen sie in einer geraden Linie.

Weil jeder Punkt einer geraden Linie aus zwei verschiedenen Punkten derselben numerisch abgeleitet werden kann, so ist die durch zwei Punkte bestimmte gerade Linie das Gebiet aller aus diesen Punkten numerisch ableitbaren Gröfsen. Dieses Gebiet heifst ein solches zweiter Stufe, wohingegen die Gesamtheit aller mit einem einfachen Punkte zusammenfallenden Punktgröfsen ein Gebiet erster Stufe genannt wird.

Lassen wir in der Gleichung (1) die Koeffizienten a_1 und a_2 variieren, dann variieren auch der Summenpunkt und sein Gewicht. Setzen wir, um dies auszudrücken, $a_1 = u_1$, $a_2 = u_2$, $s = u$, $S = U$, so folgt

$$\left.\begin{aligned} u U &= u_1 E_1 + u_2 E_2, \quad u = u_1 + u_2, \\ \text{oder} \quad U &\equiv u_1 E_1 + u_2 E_2, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wo das Zeichen $\equiv$ kongruent gelesen wird.

Die Gleichung (2) ist offenbar eine Punktgleichung der durch die Punkte E_1 und E_2 bestimmten geraden Linie.

Auch für Punktgröſsen oder Gröſsen ersten Grades im Gebiete zweiter Stufe gelten alle Gesetze der Rechnung mit Zahlen.

Sei

$$\dot{A} = a_1 E_1 + a_2 E_2, \quad \dot{B} = b_1 E_1 + b_2 E_2,$$

dann ist

$$m\dot{A} = ma_1 E_1 + ma_2 E_2, \quad \frac{\dot{A}}{m} = \frac{a_1}{m} E_1 + \frac{a_2}{m} E_2,$$

$$\dot{A} \pm \dot{B} = (a_1 \pm b_1) E_1 + (a_2 \pm b_2) E_2,$$

und wenn $a_1 + a_2 = 0$, $b_1 + b_2 = 0$ ist, also $\dot{A}$ und $\dot{B}$ Strecken sind,

$$\frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{a_1 (E_1 - E_2)}{b_1 (E_1 - E_2)} = \frac{a_1}{b_1}.$$

Produkt und Quotient aus einer Gröſse ersten Grades und einer Zahl ist wieder eine Gröſse ersten Grades. Summe und Differenz von Gröſsen ersten Grades auf einer Geraden ist wieder eine Gröſse ersten Grades. Der Quotient aus zwei gleichartigen Strecken ist eine Zahl.

Der Quotient aus zwei Punktgröſsen eines Gebietes erster Stufe ist stets eine Zahl, wohingegen solches bezüglich zweier Punktgröſsen im Gebiete zweiter Stufe im allgemeinen nicht der Fall ist, denn wir haben

$$\frac{\dot{A}}{\dot{B}} = \frac{a_1 E_1 + a_2 E_2}{b_1 E_1 + b_2 E_2} = \frac{(a_1 + a_2) A}{(b_1 + b_2) B} = \frac{a A}{b B} = \frac{a}{b} \frac{A}{B},$$

A und B sind nicht zusammenfallende Punkte, daher kann ihr Quotient nicht der absoluten Einheit gleich sein.

Seien die Punktgröſsen $\dot{A}$, $\dot{B}$ und $\dot{C}$ abgeleitet aus den Punkten E_1 und E_2, sei

$$\dot{A} = a_1 E_1 + a_2 E_2, \quad \dot{B} = b_1 E_1 + b_2 E_2, \quad \dot{C} = c_1 E_1 + c_2 E_2.$$

Eliminieren wir den Grundpunkt E_1 aus der ersten und zweiten, sodann aus der zweiten und dritten Gleichung, so folgt

$$b_1 \dot{A} - a_1 \dot{B} = (a_2 b_1 - a_1 b_2) E_2, \quad c_1 \dot{B} - b_1 \dot{C} = (b_2 c_1 - b_1 c_2) E_2,$$

und eliminieren wir den Fundamentalpunkt E_2 aus diesen Gleichungen, so ergiebt sich

$$(b_1 c_2 - b_2 c_1) \dot{A} + (a_2 c_1 - a_1 c_2) \dot{B} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \dot{C} = 0.$$

Zwischen irgend drei Punktgröſsen, welche in gerader Linie liegen, besteht stets eine Zahlbeziehung und jede derselben kann aus den beiden anderen numerisch abgeleitet werden.

Diese drei Gröfsen ersten Grades sind entweder sämtlich Punktgröfsen mit geltenden Gewichten, oder die eine ist eine solche vom Gewichte Null, eine Strecke und zwei haben geltendes Gewicht, oder zwei von ihnen sind Strecken und die dritte ist eine solche mit bestimmtem Koeffizienten, oder es sind alle drei Punktgröfsen Strecken.

§ 10. Die Summe aus drei Punktgröfsen. Das aus drei Punkten, die nicht einem Gebiete zweiter Stufe angehören, ableitbare Gebiet.

Die Summe aus den drei Punktgröfsen aA, bB und cC, deren Grundpunkte A, B und C nicht in einer geraden Linie liegen, ist

$$sS = aA + bB + cC, \quad s = a + b + c, \tag{1}$$

oder

$$sS = (aA + bB) + cC,$$

und wenn wir

$$aA + bB = (a + b)F$$

setzen, wo F einen in der geraden Linie AB liegenden Punkt bedeutet, so wird

$$sS = (a + b)F + cC.$$

Nach der letzten Gleichung liegt der Punkt S auf der durch die Punkte F und C bestimmten geraden Linie, nach der vorletzten in der durch die Punkte A und B gegebenen geraden Linie, es schneidet die Gerade FC die Gerade AB, daher liegt die gerade Linie FC und somit auch der Punkt S auf ihr in der durch die Punkte A, B und C bestimmten Ebene.

Mit $s = -t$ geht die Punktgleichung (1) über in

$$aA + bB + cC + tS = 0, \quad a + b + c + t = 0.$$

Jede aus drei nicht in einer Zahlbeziehung stehenden Punkten numerisch abgeleitete Punktgröfse befindet sich in der durch diese drei Punkte bestimmten Ebene. Besteht zwischen vier Punkten eine Zahlbeziehung, so liegen sie, wenn drei von ihnen unabhängige Punkte sind, in einer Ebene.

Sei insbesondere $a = b = c = 1$, dann ist

$$3S = A + B + C, \quad S = \frac{1}{3}(A + B + C).$$

Nun dürfen wir setzen

$$\begin{aligned} 3S &= A + (B + C) = A + 2A_1, \\ &= B + (C + A) = B + 2B_1, \\ &= C + (A + B) = C + 2C_1. \end{aligned}$$

Aber es sind A_1, B_1 und C_1 die Mittelpunkte der Seiten $(C - B)$, $(A - C)$ und $(B - A)$ des Dreiecks der Punkte A, B und C, folglich liegt der Punkt S auf den Strecken $(A_1 - A)$, $(B_1 - B)$ und $(C_1 - C)$, den Halbierungslinien dieses Dreiecks zugleich und teilt dieselben in dem Verhältnisse $2:1$.

Ist $a + b + c = s = 0$, so ist $c = -(a + b)$, daher

$$0S = aA + bB - (a+b)C = a(A - C) + b(B - C),$$

die Summe äquivalent einer Strecke, welche offenbar ebenfalls in der Ebene der Punkte A, B und C liegt.

Seien E_1, E_2 und E_3 die drei in keiner Zahlbeziehung stehenden Punkte einer Ebene, aus denen alle in ihr liegenden Punktgröfsen, Gröfsen ersten Grades numerisch abzuleiten sind.

Sei der Punkt A durch die Gleichung

$$A = a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3, \quad a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

gegeben und sei noch gefunden worden

$$A = a_1'E_1 + a_2'E_2 + a_3'E_3, \quad a_1' + a_2' + a_3' = 1,$$

dann mufs sein

$$(a_1' - a_1)E_1 + (a_2' - a_2)E_2 + (a_3' - a_3)E_3 = 0,$$

woraus folgt, denn E_1, E_2 und E_3 stehen in keiner Zahlbeziehung,

$$a_1' = a_1, \quad a_2' = a_2, \quad a_3' = a_3.$$

Jeder Punkt einer Ebene kann aus drei von einander unabhängigen Punkten derselben nur auf einerlei Weise numerisch abgeleitet werden.

Besteht die Gleichung

$$aA = a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3, \quad a_1 + a_2 + a_3 = a, \tag{2}$$

dann ist auch die folgende Gleichung richtig

$$aA - aE_1 = a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3 - (a_1 + a_2 + a_3)E_1,$$

aus welcher sich ergiebt

$$a(A - E_1) = a_2(E_2 - E_1) + a_3(E_3 - E_1),$$

$$A - E_1 = \frac{a_2}{a}(E_2 - E_1) + \frac{a_3}{a}(E_3 - E_1), \tag{3}$$

womit die Abweichung des Punktes A von dem Punkte E_1 gefunden ist, die sich auch aus der Formel

$$a(A - R) = a_1(E_1 - R) + a_2(E_2 - R) + a_3(E_3 - R)$$

ergiebt, wenn wir $R = E_1$ setzen. Auf demselben Wege erhalten wir noch

$$A - E_2 = \frac{a_1}{a}(E_1 - E_2) + \frac{a_3}{a}(E_3 - E_2),$$

$$A - E_3 = \frac{a_1}{a}(E_1 - E_3) + \frac{a_2}{a}(E_2 - E_3).$$

Dadurch kann die Lage des Punktes A in mehrfacher Weise konstruiert werden.

Setzen wir $E_2 - E_1 = m\varepsilon_1$, $E_3 - E_1 = n\varepsilon_2$, unter ε_1 und ε_2 die Einheitsstrecken der Geraden E_1E_2 und E_1E_3 verstanden, $A - E_1 = \varrho$, so geht die (3) über in

$$\varrho = \frac{a_2}{a}m\varepsilon_1 + \frac{a_3}{a}n\varepsilon_2$$

und weil auch

$$\varrho = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2$$

ist, so sind mit E_1E_2 und E_1E_3 als Richtlinien die Koordinaten des Punktes A

$$x = \frac{a_2}{a}m, \quad y = \frac{a_3}{a}n.$$

Das Dreieck der Punkte E_1, E_2 und E_3 nennen wir das Fundamentaldreieck der durch diese Punkte bestimmten Ebene, die mit seinen Seiten zusammenfallenden geraden Linien ihre Fundamentallinien, die Koeffizienten der Grundpunkte die Dreieckskoordinaten des durch sie abgeleiteten Punktes. Weil wir jedes Paar der Fundamentallinien als zusammengehörende Richtlinien, Koordinatenaxen ansehen können, so sind durch das Fundamentaldreieck drei Paare Koordinatenaxen, drei Parallelkoordinatensysteme gegeben.

Lassen wir in der Gleichung (2) die Koeffizienten der Fundamentalpunkte alle Zahlwerte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ durchlaufen, dann beschreibt der Punkt A die Ebene der Fundamentalpunkte.

Mit $A = U$, $a_k = u_k$ ist

$$uU = u_1E_1 + u_2E_2 + u_3E_3,$$

oder

$$uU = \sum_{k=1}^{k=3} u_kE_k, \quad U \equiv \sum_{k=1}^{k=3} u_kE_k, \quad \left(u = \sum_{k=1}^{k=3} u_k\right),$$

eine Punktgleichung dieser Ebene.

Die Gesamtheit aller aus drei Fundamentalpunkten numerisch ableitbaren Gröfsen nennen wir ihr Gebiet, dasselbe ist von dritter Stufe und fällt räumlich mit der durch diese Punkte bestimmten Ebene zusammen.

Auch für Gröfsen ersten Grades in der Ebene gelten die Gesetze der Vervielfachung und Teilung durch reelle Zahlen.

Ist

$$\dot{A} = \sum_{k=1}^{k=3} a_k E_k, \quad \dot{B} = \sum_{k=1}^{k=3} a_k E_k,$$

so erhalten wir

$$m\dot{A} = m(a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3) = m a_1 E_1 + m a_2 E_2 + m a_3 E_3,$$

$$\frac{1}{m}\dot{A} = \frac{1}{m}(a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3) = \frac{a_1}{m} E_1 + \frac{a_2}{m} E_2 + \frac{a_3}{m} E_3.$$

$$\dot{A} \pm \dot{B} = (a_1 \pm b_1) E_1 + (a_2 \pm b_2) E_2 + (a_3 \pm b_3) E_3.$$

Produkt und Quotient aus einer Gröfse ersten Grades und einer reellen Zahl ist wieder eine Gröfse ersten Grades, ebenso Summe und Unterschied aus zwei Gröfsen ersten Grades in einer Ebene.

Sind $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$ und $\dot{D}$ vier aus den Fundamentalpunkten E_1, E_2 und E_3 einer Ebene abgeleiteten Gröfsen ersten Grades und eliminieren wir die Grundpunkte aus den Summengleichungen dieser Gröfsen, so ergiebt sich eine lineare Gleichung zwischen diesen vier Gröfsen, was zu dem Satze führt:

Zwischen vier Gröfsen ersten Grades in einer Ebene besteht stets eine Zahlbeziehung und jede dieser vier Gröfsen kann stets aus den drei übrigen numerisch abgeleitet werden.

Diese Ableitung findet statt: 1) aus drei Punktgröfsen, 2) aus zwei Punktgröfsen und einer Strecke, 3) aus einer Punktgröfse und zwei Strecken, 4) aus drei Strecken.

§ 11. Die Summe aus vier Punktgröfsen. Das aus vier unabhängigen Punkten ableitbare Gebiet.

Sind aA, bB, cC und dD vier Punktgröfsen, deren Grundpunkte A, B, C und D in keiner Zahlbeziehung stehen sollen, so ist ihre Summe

$$sS = aA + bB + cC + dD, \quad s = a + b + c + d. \tag{1}$$

Nun ist auch

$$sS = (aA + bB + cC) + dD = (a + b + c)\, F + dD,$$

der Punkt S liegt mithin auf der durch die Punkte F und D bestimmten geraden Linie, aber der Punkt F befindet sich in der Ebene der Punkte A, B und C, der Punkt D aufserhalb ihr, so dafs, wenn die Koeffizienten ungleich Null sind, S nicht in einer der durch die gegebenen Punkte bestimmten Ebenen, sondern aufserhalb derselben im Raume sich befindet.

Aus (1) folgt

$$S = \frac{a}{s}A + \frac{b}{s}B + \frac{c}{s}C + \frac{d}{s}D = a_1 A + b_1 B + c_1 C + d_1 D,$$

wäre noch

$$S = \frac{a'}{s'}A + \frac{b'}{s'}B + \frac{c'}{s'}C + \frac{d'}{s'}D = a_1' A + b_1' B + c_1' C + d_1' D,$$

dann müfste sein

$$(a_1' - a_1)A + (b_1' - b_1)B + (c_1' - c_1)C + (d_1' - d_1)D = 0,$$

welche Gleichung, weil die in ihr vorkommenden Punkte unabhängig sind, nur dann befriedigt werden kann, wenn

$$a_1' = a_1, \quad b_1' = b_1, \quad c_1' = c_1, \quad d_1' = d_1$$

ist.

Mit $s = -t$ läfst sich die Gleichung (1) schreiben

$$aA + bB + cC + dD + tS = 0, \quad a + b + c + d + t = 0.$$

Jede Punktgröfse des Raumes läfst sich aus irgend vier in keiner Zahlbeziehung stehenden Punkten numerisch ableiten und zwar nur auf einerlei Weise. Zwischen fünf Punkten des Raumes existiert stets eine Zahlbeziehung. Besteht zwischen fünf Punkten, von denen keine vier numerisch auseinander ableitbar sind, eine Zahlbeziehung, so liegen sie nicht in einer Ebene, sind sie Punkte des Raumes.

Mit $a = b = c = d = 1$ erhalten wir

$$4S = A + B + C + D,$$

$$4S = A + (B + C + D) = A + 3A_1, \quad 4S = B + (C + D + A) = B + 3B_1,$$

$$4S = C + (D + A + B) = C + 3C_1, \quad 4S = D + (A + B + C) = D + 3D_1.$$

Die Punkte A, B, C und D fallen mit den Eckpunkten eines Tetraeders zusammen, A_1, B_1, C_1 und D_1 sind die Mittelpunkte der diesen Punkten gegenüberliegenden Seitenflächen des Tetraeders. Der Summenpunkt S ist mithin der Schnittpunkt der die Ecken der Pyramide mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seitenflächen verbindenden Strecken $(A_1 - A)$, $(B_1 - B)$, $(C_1 - C)$ und $(D_1 - D)$, und es teilen sich diese Strecken in dem Verhältnisse $3:1$.

Aus den Gleichungen für $4S$ ergiebt sich noch

$$3(A_1 - B_1) = B - A, \quad 3(B_1 - C_1) = C - B,$$

$$3(C_1 - D_1) = D - C, \quad 3(D_1 - A_1) = A - D.$$

Mithin sind die Mittelpunkte der Seitenflächen der Pyramide $ABCD$ die Ecken einer zweiten Pyramide $A_1 B_1 C_1 D_1$, deren Kanten parallel den gleichnamigen Kanten der ersteren sind, und es ist die dreifache Länge einer Kante der zweiten Pyramide gleich der entsprechenden Kante des ersten Tetraeders.

Sind E_1, E_2, E_3, E_4 vier von einander unabhängige Punkte und besteht die Gleichung

$$\dot{A} = \sum_{k=1}^{k=4} a_k E_k,$$

so ist entweder $\sum_{k=1}^{k=4} a_k \gtrless 0$, oder $\sum_{k=1}^{k=4} a_k = 0$.

1) $\sum_{k=1}^{k=4} a_k \gtrless 0$. Indem wir einen weiteren Punkt E_5 annehmen und $\sum_{k=1}^{k=4} a_k E_5$ auf beiden Seiten der letzten Gleichung subtrahieren, so wird

$$\dot{A} - \sum_{k=1}^{k=4} a_k E_5 = \sum_{k=1}^{k=4} a_k (E_k - E_5).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung zeigt die Summe von vier Strecken, mithin mufs $\dot{A}$ eine Punktgröfse vom Gewichte $\sum_{k=1}^{k=4} a_k$, also $\dot{A} = \sum_{k=1}^{k=4} a_k A$ sein und nach dem vorigen im Raume liegen.

2) $\sum_{k=1}^{k=4} a_k = 0$. In diesem Falle ist $a_4 = -\sum_{k=1}^{k=3} a_k$, folglich

$$\dot{A} = \sum_{k=1}^{k=3} a_k (E_k - E_4).$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung steht eine Summe von drei Strecken, welche den in der Ecke E_4 des Tetraeders $E_1 E_2 E_3 E_4$ zusammenstofsenden Kanten desselben parallel sind, mithin ist, wenn die Summe der Ableitungszahlen verschwindet, die Gröfse $\dot{A}$ eine Strecke des Raumes.

Besteht die Gleichung

$$aA = \sum_{k=1}^{k=4} a_k E_k, \quad a = \sum_{k=1}^{k=4} a_k, \tag{2}$$

so ist die Abweichung des Punktes A von einem beliebigen Punkte R des Raumes gegeben durch

$$A - R = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{k=4} (E_k - R).$$

Mit $R = E_1$ ergiebt sich hieraus

$$A - E_1 = \frac{a_2}{a}(E_2 - E_1) + \frac{a_3}{a}(E_3 - E_1) + \frac{a_4}{a}(E_4 - E_1),$$

der Streckenabstand des Punktes A vom Punkte E_1. Mit $A - E_1 = \varrho$, $E_2 - E_1 = m\varepsilon_1$, $E_3 - E_1 = n\varepsilon_2$, $E_4 - E_1 = p\varepsilon_3$, wo ε_1, ε_2 und ε_3 die Einheitsstrecken der Geraden E_1E_2, E_1E_3 und E_1E_4 resp. sein sollen, erhalten wir hieraus

$$\varrho = \frac{a_2}{a} m\varepsilon_1 + \frac{a_3}{a} n\varepsilon_2 + \frac{a_4}{a} p\varepsilon_3,$$

und weil auch

$$\varrho = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3$$

ist, so sind die Cartesischen Koordinaten des Punktes A

$$x = \frac{a_2}{a} m, \quad y = \frac{a_3}{a} n, \quad z = \frac{a_4}{a} p.$$

Das Tetraeder der Punkte E_1, E_2, E_3 und E_4 nennen wir ein Fundamentaltetraeder, seine Eckpunkte Fundamentalpunkte und die mit seinen Kanten zusammenfallenden geraden Linien Fundamentallinien des Raumes, die Koeffizienten der Grundpunkte, durch welche ein beliebiger Punkt des Raumes aus ihnen abgeleitet werden kann, Tetraederkoordinaten dieses Punktes. In jeder Ecke des Grundtetraeders stofsen drei seiner Kanten zusammen, deren Richtungen als Axen eines Parallelkoordinatensystems angesehen werden können, so dafs das Fundamentaltetraeder vier Cartesische Koordinatensysteme bestimmt.

Lassen wir in der Punktgleichung (2) die Koeffizienten der Fundamentalpunkte alle Werte zwischen den Zahlen $-\infty$ und $+\infty$ durchlaufen, so erzeugt der Punkt A sämtliche Punkte des Raumes. Setzen wir, um dies zu karakterisieren, $A = U$, $a = u$, $a_k = u_k$, so ergiebt sich

$$u\,U = \sum_{k=1}^{k=4} a_k E_k, \quad u = \sum_{k=1}^{k=4} a_k,$$

welche Gleichung alle aus den Fundamentalpunkten E_k, $k = 1, 2, .. 4$, ableitbaren Punkte des geometrischen Raumes repräsentiert, sie ist also als eine Punktgleichung des Raumes aufzufassen, den Raum als Punktsystem gedacht.

Für die Gröfsen ersten Grades im Raume gelten die Gesetze der Vervielfachung und Teilung durch reelle Zahlen ebenfalls.

Wir erhalten, wenn

$$\dot{A} = \sum_{k=1}^{k=4} a_k E_k\,, \quad \dot{B} = \sum_{k=1}^{k=4} b_k E_k$$

ist und m irgend eine reelle Zahl bedeutet,

$$m\dot{A} = m\sum_{k=1}^{k=4} a_k E_k = \sum_{k=1}^{k=4} m a_k E_k\,,$$

$$\frac{\dot{A}}{m} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{k=4} a_k E_k = \sum_{k=1}^{k=4} \frac{a_k}{m} E_k\,.$$

$$A \pm B = \sum_{k=1}^{k=4} (a_k \pm b_k) E_k\,.$$

Produkt und Quotient aus einer Gröfse ersten Grades und einer reellen Zahl, sowie Summe und Unterschied aus zwei Gröfsen ersten Grades ist wieder eine Gröfse ersten Grades.

Die Gesamtheit aller aus vier nicht in einer Zahlbeziehung stehenden Punkten numerisch ableitbaren Gröfsen ersten Grades nennen wir das Gebiet dieser Punkte. Dasselbe heifst ein Gebiet vierter Stufe und umfafst sämtliche Punkte des geometrischen Raumes. Aus irgend vier, die Eckpunkte eines Tetraeders bildenden Punkten resultiert durch numerische Ableitung stets derselbe Raum als Punktsystem, als Elementarsystem vierter Stufe, stets dasselbe Gebilde.

Aus drei, die Ecken eines Dreiecks seienden Punkten läfst sich nur eine Ebene, nämlich die mit der Ebene des Dreiecks zusammenfallende, als Punktsystem ableiten, liegen drei andere Fundamentalpunkte in dieser Ebene, so erfüllen die sämtlichen aus ihnen numerisch abgeleiteten Punkte diese Ebene ebenfalls, befinden sie sich aber nicht oder nur teilweise in dieser Ebene, so erhalten wir als aus ihnen abgeleitetes Punktsystem eine andere Ebene. Die Ebenen des Raumes sind deshalb als ungleichartige Punktsysteme dritter Stufe aufzufassen. Die Gesamtheit aller aus zwei Punkten numerisch ableitbaren Punkte bildet ein Punktsystem zweiter Stufe, eine durch diese Punkte hindurchgehende gerade Linie als Punktreihe. Das aus zwei anderen Punkten dieser Geraden abgeleitete Punktsystem ist mit ihr als Punktreihe identisch. Fallen zwei weitere Fundamentalpunkte nicht in diese Gerade hinein oder thut solches nur einer von ihnen, so ergiebt sich durch numerische Ableitung aus ihnen ein anderes Punktsystem zweiter

Stufe. Mithin sind die Geraden des Raumes als Punktsysteme zweiter Stufe voneinander verschieden.

Sind

$$\dot{A}_k = a_k E_1 + b_k E_2 + c_k E_3 + d_k E_4, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5$$

fünf aus den Fundamentalpunkten E_1, E_2, E_3 und E_4 numerisch abgeleitete Gröfsen ersten Grades, und eliminieren wir aus diesen Gleichungen die Fundamentalpunkte, so ergiebt sich eine lineare Gleichung von der Form

$$\sum_{k=1}^{k=5} m_k A_k = 0.$$

Zwischen fünf Gröfsen ersten Grades im Raume existiert stets eine Zahlbeziehung. Alle Punktgröfsen des Raumes lassen sich aus vier, nicht in einer Ebene liegenden Punktgröfsen numerisch ableiten.

Die numerische Ableitung einer Punktgröfse und eines einfachen Punktes des Raumes kann auf vierfache Weise geschehen:

1) Aus einem endlich fernen und drei unendlich fernen Punkten, d. h. aus einer Punktgröfse mit geltendem Gewichte und drei nicht einer Ebene parallelen Strecken. 2) Aus zwei nicht zusammenfallenden Punktgröfsen mit geltendem Gewichte und zwei Strecken, welche nicht einer durch jene zwei Punkte gelegten Ebene parallel sind. 3) Aus drei, die Ecken eines Dreiecks bildenden Punktgröfsen und einer zu der Ebene der drei Punkte nicht parallelen Strecke. 4) Aus vier nicht in einer Ebene liegenden, endlich entfernten Punkten.

Die Beweise dieser Sätze folgen aus der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{k=5} m_k A_k = 0,$$

aber sie können auch direkt geführt werden.

1) Sind $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ drei nicht in einer Ebene parallele Strecken, $\dot{D} = dD$ und $\dot{E} = eE$ zwei im Endlichen gelegene Punktgröfsen, so ist $\dot{E}$ aus den übrigen Gröfsen numerisch ableitbar. — Wir können setzen

$$E - D = m\overline{A} + n\overline{B} + p\overline{C}, \quad \text{so dafs} \quad E = D + m\overline{A} + n\overline{B} + p\overline{C},$$

mithin

$$\frac{\dot{E}}{e} = \frac{\dot{D}}{d} + m\overline{A} + n\overline{B} + p\overline{C}, \quad \text{so dafs} \quad \dot{E} = \frac{e}{d}\dot{D} + e(m\overline{A} + n\overline{B} + p\overline{C})$$

ist. Wenn die abzuleitende Punktgröfse eine unendlich entfernte, eine Strecke ist, so ist sie schon aus $\bar{A}$, $\bar{B}$ und $\bar{C}$ ableitbar, denn dann ist $d = 0$.

2) Seien $\bar{A}$ und $\bar{B}$ zwei Strecken, $\dot{C} = cC$ und $\dot{D} = dD$ zwei endlich entfernte Punktgröfsen, und lasse sich durch C und D keine Ebene legen, welche mit $\bar{A}$ und $\bar{B}$ parallel ist. — Setzen wir $C - D = \bar{C}$, so sind $\bar{A}$, $\bar{B}$ und $\bar{C}$ drei nicht einer Ebene parallele Strecken, und es wird

$E - D = m\bar{A} + n\bar{B} + p\bar{C}$ sein, so dafs $E = m\bar{A} + n\bar{B} + p\bar{C} + D$ ist, also

$$\frac{\dot{E}}{e} = m\bar{A} + n\bar{B} + p\left(\frac{\dot{C}}{c} - \frac{\dot{D}}{d}\right) + \frac{\dot{D}}{d},$$

woraus folgt

$$\dot{E} = e(m\bar{A} + n\bar{B}) + \frac{pe}{c}\dot{C} + \frac{e}{d}(1 - p)\dot{D}.$$

3) Sei $\bar{A}$ eine Strecke, seien $\dot{B} = bB$, $\dot{C} = cC$ und $\dot{D} = dD$ drei endlich entfernte Punktgröfsen, die nicht in einer geraden Linie liegen, und sei $\bar{A}$ nicht mit der Ebene der Punkte B, C und D parallel. — Setzen wir $B - D = \bar{B}$, so ist nach 2) jeder Punkt E aus $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\dot{C}$ und $\dot{D}$ numerisch ableitbar, es ist

$$\dot{E} = e(m\bar{A} + n\bar{B}) + \frac{pe}{c}\dot{C} + \frac{e}{d}(1 - p)\dot{D},$$

mithin ergiebt sich, wenn wir für $\bar{B}$ seinen Wert setzen,

$$\dot{E} = em\bar{A} + \frac{ne}{b}\dot{B} + \frac{pe}{c}\dot{C} + \frac{e}{d}(1 - p - n)\dot{D}.$$

4) Seien $\dot{A} = aA$, $\dot{B} = bB$, $\dot{C} = cC$, $\dot{D} = dD$ vier Punktgröfsen, deren Grundpunkte im Endlichen gelegen und voneinander unabhängig, die Koeffizienten der Grundpunkte sämtlich ungleich Null. Setzen wir $A - D = \bar{A}$, so ist aus $\bar{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$ und $\dot{D}$ die Punktgröfse $\dot{E} = eE$ numerisch ableitbar, und wenn wir in die letzte Gleichung für $\dot{E}$ den Wert von $\bar{A} = \frac{\dot{A}}{a} - \frac{\dot{D}}{d}$ substituieren, so ergiebt sich

$$\dot{E} = \frac{em}{a}\dot{A} + \frac{ne}{b}\dot{B} + \frac{pe}{c}\dot{C} + \frac{e}{d}(1 - p - n - m)\dot{D}.$$

Wählen wir in dem ersten dieser Ableitungssysteme die Längen der drei Strecken gleich grofs, so erscheint das gewöhnliche Parallelkoordinatensystem. Das letzte System repräsentiert, wenn die Punkte einfache Punkte sind, das allgemeine lineare Koordinatensystem, wie es von Plücker und Anderen behandelt worden ist.

§ 12. Gemeinsames und verbindendes Gebiet von Elementen des Raumes.

Sind zwei gerade Linien aus den Punkten E_1, E_2 und E_3, E_4 resp., welche in keiner Zahlbeziehung stehen, numerisch abgeleitet, so haben sie kein gemeinsames Gebiet, keinen Schnittpunkt, ihr verbindendes Gebiet ist das aus den Punkten E_1, E_2, E_3 und E_4 numerisch abgeleitete Gebiet vierter Stufe, der Raum als Punktgebilde, die beiden geraden Linien kreuzen sich. Sind zwei gerade Linien aus den Punkten E_1, E_2 und E_2, E_3 resp. numerisch abgeleitet, so besitzen sie als gemeinsames Gebiet erster Stufe den Punkt E_2, welcher ihr Schnittpunkt ist; ihr verbindendes Gebiet ist das aus E_1, E_2 und E_3 abgeleitete, dasselbe ist von dritter Stufe und fällt mit der durch die beiden Geraden bestimmten Ebene zusammen.

Zwei Ebenen, welche als Punktsysteme aus E_1, E_2, E_3, resp. E_2, E_3, E_4 numerisch abgeleitet sind, wobei diese vier Punkte in keiner Zahlbeziehung stehen, besitzen ein gemeinsames Gebiet zweiter Stufe, nämlich das aus E_2 und E_3 numerisch abgeleitete System zweiter Stufe, welches ihre Schnittlinie als gerade Punktreihe ausmacht, und ein verbindendes Gebiet vierter Stufe, das aus den Punkten E_1, E_2, E_3 und E_4 abzuleiten ist, den Raum als Punktsystem ausmacht.

In gleicher Weise finden wir, dafs eine gerade Linie und eine Ebene, wenn erstere nicht in der letzteren liegt, als gemeinsames Gebiet einen Punkt, welcher ihr Schnittpunkt ist, und als verbindendes Gebiet den Raum besitzen.

§ 13. Geschichtliche Notizen.

Die Summation von Punkten wurde im Jahre 1827 zuerst von A. F. Möbius in seinem berühmt gewordenen baryzentrischen Kalkül gelehrt. Die Addition von Strecken hat wahrscheinlich Bellavitis zuerst entdeckt, derselbe behandelte sie in mehreren Aufsätzen der Annali delle Scienze del Regno Lombardo Veneto, 1835 und 1837. In seiner Mechanik des Himmels (1842) hat auch Möbius die Addition von Strecken besprochen. Ganz unabhängig davon that Grafsmann die Summation von Strecken und Punktgröfsen in seiner linealen Ausdehnungslehre von 1844 (§ 26 und § 101—102) und deren Zusammenhang dar. In der Ausdehnungslehre von 1862 führt Grafsmann unter Nr. 227 den Nachweis, dafs es aufser der bisher entwickelten Addition keine andere Summation von Strecken und Punkten giebt, wodurch

unsere Addition als eine wirkliche Addition jener Gröſsen und nicht blos als eine abgekürzte Schreibart aufgefaſst werden muſs, wie solches bei Möbius der Fall ist.

§ 14. Anwendung des Summationstheorems der Punktgröſsen.

1) Bereits drei Punkte einer geraden Linie sind voneinander abhängig und um so mehr sind solches vier Punkte derselben. Haben z. B. die Punkte A, B, C und D in einer geraden Linie eine solche Lage, daſs die Gleichung besteht

$$\frac{C-A}{B-C}:\frac{D-A}{B-D}=-1,$$

so sagen wir, daſs die Strecke $(B-A)$ durch die Punkte C und D harmonisch geteilt werde. Dann wird auch die Strecke $(D-C)$ durch die Punkte A und B harmonisch geteilt. Solche vier Punkte heiſsen harmonische Punkte, A und B, sowie C und D einander zugeordnete Punkte.

Es ist

$$\frac{C-A}{B-C}=\frac{D-A}{D-B}, \quad \frac{A-C}{D-A}=\frac{B-C}{B-D}.$$

Sind A und B die beiden gegebenen konjugierten Punkte, setzen wir

$$\frac{C-A}{B-C}=\frac{D-A}{D-B}=\frac{m}{l},$$

so wird

$$l(C-A)=m(B-C), \quad l(D-A)=m(D-B),$$
$$(l+m)C=lA+mB, \quad (l-m)D=lA-mB,$$

woraus folgt

$$C=\frac{lA+mB}{l+m}, \quad D=\frac{lA-mB}{l-m},$$

oder, wenn wir $m:l=n$ setzen,

$$C=\frac{A+nB}{1+n}, \quad D=\frac{A-nB}{1-n}.$$

Mit $(l+m)C=\dot{C}$, $lA=\dot{A}$, $mB=\dot{B}$, $(l-m)D=\dot{D}$ ergiebt sich

$$\dot{C}=\dot{A}+\dot{B}, \quad \dot{D}=\dot{A}-\dot{B}.$$

„Liegen vier Punktgröſsen auf einer geraden Linie, ist die eine die Summe von zweien, die vierte der Unterschied dieser zwei, so sind ihre Grundpunkte harmonische Punkte.“

2) Seien A, B, C drei die Ecken eines Dreiecks bildende Punkte

und sei D ein beliebiger Punkt in der Ebene dieses Dreiecks (Fig. 12).

Fig. 12.

Der Punkt D läfst sich aus den Punkten A, B, C eindeutig numerisch ableiten, sind a, b, c die Ableitungszahlen, so ist

$$sD = aA + bB + cC, \quad s = a + b + c. \tag{1}$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\begin{aligned} sD = (a+b)C_1 + cC &= (b+c)A_1 + aA \\ &= (c+a)B_1 + bB, \end{aligned} \tag{2}$$

wenn wir setzen

$$aA + bB = (a+b)C_1, \quad bB + cC = (b+c)A_1, \quad cC + aA = (c+a)B_1. \tag{3}$$

Die Punkte C_1, A_1 und B_1 liegen auf den Seitenlinien BC, CA und AB resp. des Dreiecks der Punkte A, B und C. Nun folgt aus (2)

$$D = \frac{(a+b)C_1 + cC}{a+b+c} = \frac{(b+c)A_1 + aA}{a+b+c} = \frac{(c+a)B_1 + bB}{a+b+c}, \tag{4}$$

so dafs

$$\frac{D - C_1}{C - C_1} = \frac{c}{s}, \quad \frac{D - C}{C_1 - C} = \frac{a+b}{s},$$
$$\frac{D - A_1}{A - A_1} = \frac{a}{s}, \quad \frac{D - A}{A_1 - A} = \frac{b+c}{s},$$
$$\frac{D - B_1}{B - B_1} = \frac{b}{s}, \quad \frac{D - B}{B_1 - B} = \frac{c+a}{s}$$

ist, woraus hervorgeht

$$\frac{D - C_1}{C - D} = \frac{c}{a+b}, \quad \frac{D - A_1}{A - D} = \frac{a}{b+c}, \quad \frac{D - B_1}{B - D} = \frac{b}{c+a}.$$

Damit sind die Verhältnisse bestimmt, nach welchen der Punkt D die Strecken $(C - C_1)$, $(A - A_1)$ und $(B - B_1)$ teilt.

Ferner erhalten wir aus den Gleichungen (3)

$$C_1 = \frac{aA + bB}{a+b}, \quad A_1 = \frac{bB + cC}{b+c}, \quad B_1 = \frac{cC + aA}{c+a},$$

so dafs

$$\frac{C_1 - A}{B - A} = \frac{b}{a+b}, \quad \frac{C_1 - B}{A - B} = \frac{a}{a+b},$$
$$\frac{A_1 - B}{C - B} = \frac{c}{b+c}, \quad \frac{A_1 - C}{B - C} = \frac{b}{b+c},$$
$$\frac{B_1 - C}{A - C} = \frac{a}{c+a}, \quad \frac{B_1 - A}{C - A} = \frac{c}{c+a}$$

ist, wodurch sich ergiebt

$$\frac{C_1 - A}{B - C_1} = \frac{b}{a}, \quad \frac{A_1 - B}{C - A_1} = \frac{c}{b}, \quad \frac{B_1 - C}{A - B_1} = \frac{a}{c}.$$

Diese Relationen drücken die Verhältnisse aus, nach welchen die Punkte C_1, A_1 und B_1 die Seiten $(B - A)$, $(C - B)$ und $(A - C)$ des Dreiecks der Punkte A, B und C teilen.

Aus den drei letzten Gleichungen folgt

$$\frac{C_1 - A}{B - C_1} \frac{A_1 - B}{C - A_1} \frac{B_1 - C}{A - B_1} = 1,$$

womit der Satz des Ceva vor uns steht.

Die Punkte A_1, B_1 und C_1 bestimmen ein zweites Dreieck, seine Seiten sind

$$C_1 - B_1 = \frac{aA + bB}{a + b} - \frac{cC + aA}{c + a},$$

oder

$$C_1 - B_1 = \frac{ab(B - A) + bc(B - C) + ca(A - C)}{(a + b)(c + a)},$$

$$A_1 - C_1 = \frac{ab(B - A) + bc(C - B) + ca(C - A)}{(b + c)(a + b)},$$

$$B_1 - A_1 = \frac{ab(A - B) + bc(C - B) + ca(A - C)}{(c + a)(b + c)}.$$

Sind die Koeffizienten a, b und c positiv, so liegt der Punkt D innerhalb des Dreiecks der Punkte A, B und C. Denn die Punkte A_1, B_1 und C_1 müssen zufolge ihrer Gleichungen dann zwischen den Grenzelementen der Strecken $(C - B)$, $(A - C)$ und $(B - A)$ resp., also auf denselben liegen, der Punkt D mufs sich nach (2) oder (4) auf den Strecken $(C - C_1)$, $(A - A_1)$ und $(B - B_1)$ zugleich befinden, die im Dreiecke ABC verlaufen, mithin liegt D innerhalb dieses Dreieckes.

In dem speciellen Falle $a = b = c = 1$ ist

$$3D = A + B + C = 2C_1 + C = 2A_1 + A = 2B_1 + B,$$

$$2C_1 = A + B, \quad 2A_1 = B + C, \quad 2B_1 = C + A,$$

$$2(C_1 - B_1) = B - C, \quad 2(A_1 - C_1) = C - A, \quad 2(B_1 - A_1) = A - B,$$

$$(C_1 - B_1):(B - C) = (A_1 - C_1):(C - A) = (B_1 - A_1):(A - B) = 1:2.$$

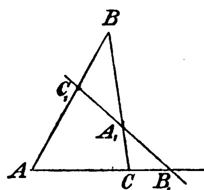
„Ziehen wir aus den Ecken eines Dreiecks nach den Mittelpunkten seiner, diesen Ecken gegenüber liegenden Seiten Strecken, so schneiden sich diese in einem Punkte und teilen sich nach dem Verhältnisse 2 : 1, die Seiten des Dreiecks der Seitenmittelpunkte des gegebenen Dreiecks sind parallel zu den gegenüber liegenden Seiten des letzteren und halb so lang als diese.“

Ist einer oder sind zwei der Koeffizienten a, b, c negativ, dann befindet sich der Punkt D aufserhalb des Dreiecks ABC. Die Verhältnisse der Seitenabschnitte durch die Punkte A_1, B_1 und C_1 folgen dann aus den vorstehenden Formeln, wenn wir nur den oder die frag-

lichen Koeffizienten daselbst mit dem Minuszeichen einsetzen. Sind alle drei Koeffizienten negativ, dann kommen wir auf den ersten Fall zurück, wenn wir die für den Summenpunkt zunächst sich ergebende Gleichung mit -1 multiplizieren.

3) Ist ABC (Fig. 13) ein beliebiges Dreieck und schneidet eine beliebige gerade Linie seine Strecken, resp. deren Verlängerungen in den Punkten A_1, B_1 und C_1, so dürfen wir setzen:

Fig. 13.



$$(b + c)A_1 = bB + cC, \qquad (1)$$
$$(c + a)B_1 = cC + aA, \qquad (2)$$

und für den Punkt C_1 lassen sich die beiden Gleichungen aufstellen

$$(1 + u)C_1 = A + uB, \quad (1 + v)C_1 = A_1 + vB_1. \qquad (3)$$

Aus den Gleichungen (3) folgt

$$C_1 = \frac{A + uB}{1 + u} = \frac{A_1 + vB_1}{1 + v},$$

hieraus

$$(A + uB)(1 + v) = (A_1 + vB_1)(1 + u).$$

Setzen wir in diese Gleichung die Werte von A_1 und B_1 aus (1) und (2) ein und formen sie etwas um, so ergiebt sich

$$\frac{1}{c + a}\{c + a + cv - auv\}A + \frac{1}{b + c}\{cu + (b + c)uv - b\}B$$
$$- \frac{c(1 + u)}{(b + c)(c + a)}\{c + a + (b + c)v\}C = 0,$$

welche Gleichung, weil A, B und C voneinander unabhängige Gröfsen sind, nur dann befriedigt werden kann, wenn

$$c + a + cv - auv = 0, \quad cu + (b + c)uv - b = 0, \quad c + a + (b + c)v = 0,$$

und aus diesen Relationen erhalten wir

$$v = -\frac{c + a}{b + c}, \quad u = -\frac{b}{a}.$$

Mit diesem Werte von u geht die erste der Gleichungen (3) über in

$$(a - b)C_1 = aA - bB. \qquad (4)$$

Nun folgt aus (1), (2) und (4)

$$\frac{A_1 - B}{C - A_1} = \frac{c}{b}, \quad \frac{B_1 - C}{A - B_1} = \frac{a}{c}, \quad \frac{C_1 - A}{B - C_1} = -\frac{b}{a},$$

mithin ist

$$\frac{A_1 - B}{C - A_1}\,\frac{B_1 - C}{A - B_1}\,\frac{C_1 - A}{B - C_1} = -1,$$

welche Gleichung den Satz des Menelaus ausdrückt.

4) Seien $B_1, B_2, \dots B_n$ die Seitenmittelpunkte eines n-Ecks, $A_1, A_2, \dots A_n$ dessen Eckpunkte. — Bezeichnen wir irgend einen Eckpunkt, etwa den Punkt A_1 durch X, dann ist

$$\begin{array}{llll}
2B_1 = X + A_2, & A_1 = X, \\
2B_2 = A_2 + A_3, & A_2 = 2\,B_1 - X, \\
2B_3 = A_3 + A_4, & A_3 = 2(B_2 - B_1) + X, \\
\dots\dots\dots & A_4 = 2(B_3 - B_2 + B_1) - X, \\
2B_{n-1} = A_{n-1} + A_n, & \dots\dots\dots \\
2B_n = A_n + X, & A_n = 2(B_{n-1} - B_{n-2} + B_{n-3} - \cdots \pm B_1) \mp X.
\end{array}$$

Aus der ersten Reihe von Gleichungen folgt durch deren Addition

$$B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_n = A_2 + A_3 + A_4 + \cdots + A_n + X.$$

Nun ist n entweder eine gerade oder eine ungerade ganze Zahl.

a) n ungerade. Dann giebt die zweite Gleichungenreihe

$$A_2 + A_3 + A_4 + \cdots + A_n = 2(B_2 + B_4 + B_6 + \cdots + B_{n-1}),$$

und die Verknüpfung der beiden letzten Gleichungen liefert

$$(X - B_n) = (B_1 - B_2) + (B_3 - B_4) + \cdots + (B_{n-2} - B_{n-1}),$$

wodurch der Punkt X und damit das Vieleck eindeutig bestimmt ist.

b) n gerade. In diesem Falle erhalten wir auf demselben Wege

$$(B_1 - B_2) + (B_3 - B_4) + \cdots + (B_{n-1} - B_n) = 0,$$

in welcher Gleichung der Punkt X nicht enthalten ist, so dafs seine Lage unbestimmt bleibt.

„Sind die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen n-Ecks von ungerader Seitenzahl gegeben, so ist dasselbe dadurch vollständig bestimmt, durch den Anfangs- oder Endpunkt irgend einer Seite, welcher zu den Mittelpunkten der Seiten in eindeutiger Beziehung steht, sind sodann sämtliche Seiten desselben gegeben. Dahingegen bestimmen die Mittelpunkte der Seiten eines Vielecks von gerader Seitenzahl dasselbe nicht vollständig, denn sie stehen in einer Zahlbeziehung.“

Seien B_1, B_2 und B_3 die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks und A_1, A_2, A_3 dessen zu suchenden Eckpunkte.

Mit $X = A_1, A_2, A_3$ erhalten wir

$$A_1 - B_1 = B_3 - B_2, \quad A_2 - B_2 = B_1 - B_3, \quad A_3 - B_3 = B_2 - B_1,$$

daher ist

$$A_2 - A_1 = 2(B_2 - B_3), \quad A_3 - A_2 = 2(B_3 - B_1), \quad A_1 - A_3 = 2(B_1 - B_2).$$

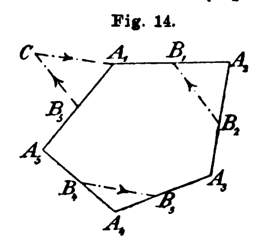
Die Seiten des zu suchenden Dreiecks sind demnach das Zweifache

der ihnen gegenüber liegenden Seiten des Dreiecks der gegebenen Mittelpunkte, woraus eine sehr einfache Konstruktion desselben folgt.

Für ein Fünfeck, dessen Seitenmittelpunkte B_1, B_2, ... B_5 sind, haben wir, mit $X = A_1$,

$$(A_1 - B_5) = (B_1 - B_2) + (B_3 - B_4).$$

Fig. 14.



Zeichnen wir daher (Fig. 14) $C - B_5 = B_1 - B_2$, $A_1 - C = B_3 - B_4$, so ist A_1 ein Eckpunkt, $(B_1 - A_1)$ und $(A_1 - B_5)$ je eine halbe Seite des Fünfecks, welches sich nun leicht vervollständigen läfst.

5) „Haben zwei Dreiecke ABC und $A_1 B_1 C_1$ (Fig. 15) eine solche Lage, dafs die Verbindungslinien der Eckpunkte A und A_1, B und B_1, C und C_1 sich in einem Punkte O schneiden, dann liegen die Schnittpunkte der drei Paare jenen Ecken gegenüber liegenden Seitenlinien dieser Dreiecke in einer geraden Linie.“

Fig. 15.

Weil der Punkt O auf drei Strahlen zugleich liegt, so bestehen die Gleichungen

$$O = aA - a_1 A_1 = bB - b_1 B_1 = cC - c_1 C_1,$$
$$a - a_1 = b - b_1 = c - c_1 = 1,$$
$$a - b = a_1 - b_1,$$
$$b - c = b_1 - c_1,$$
$$c - a = c_1 - a_1.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$aA - bB = a_1 A_1 - b_1 B_1 = (a - b) C_2 = (a_1 - b_1) C_2,$$
$$bB - cC = b_1 B_1 - c_1 C_1 = (b - c) A_2 = (b_1 - c_1) A_2,$$
$$cC - aA = c_1 C_1 - a_1 A_1 = (c - a) B_2 = (c_1 - a_1) B_2,$$

und es sind offenbar die Punkte C_2, A_2 und B_2 die Schnittpunkte der Geraden AB und $A_1 B_1$, BC und $B_1 C_1$, sowie CA und $C_1 A_1$.

Die Addition der vorstehenden Gleichungen giebt

$$(a - b) C_2 + (b - c) A_2 + (c - a) B_2 = 0, \quad (a - b) + (b - c) + (c - a) = 0,$$
$$(a_1 - b_1) C_2 + (b_1 - c_1) A_2 + (c_1 - a_1) B_2 = 0, \quad (a_1 - b_1) + (b_1 - c_1) + (c_1 - a_1) = 0.$$

Mithin liegen die Punkte C_2, A_2 und B_2 in einer geraden Linie.

Zu demselben Resultate können wir auch auf kürzerem Wege gelangen, wobei jedoch die Maafsverhältnisse der Figur nicht zum Ausdruck kommen.

Wir haben, indem wir mit Punktgröfsen rechnen,

$$\dot{O} = \dot{A} - \dot{A}_1 = \dot{B} - \dot{B}_1 = \dot{C} - \dot{C}_1$$

daher ist

$$\dot{A}-\dot{B}=\dot{A}_1-\dot{B}_1=\dot{C}_2,\quad \dot{B}-\dot{C}=\dot{B}_1-\dot{C}_1=\dot{A}_2,\quad \dot{C}-\dot{A}=\dot{C}_1-\dot{A}_1=\dot{B}_2,$$

woraus folgt

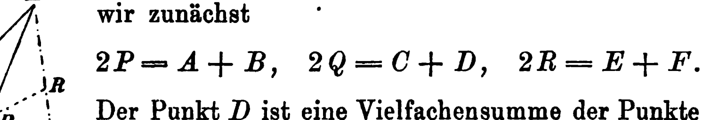
$$\dot{C}_2+\dot{A}_2+\dot{B}_2=0.$$

Weil hiernach zwischen diesen drei Punktgröfsen eine Zahlbeziehung besteht, so liegen sie und somit auch ihre Grundpunkte in einer geraden Linie.

6) „Die Mittelpunkte der Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen in einer geraden Linie.“

Sind P, Q, R die Mittelpunkte der Diagonalen $(B-A)$, $(D-C)$, $(F-E)$ des vollständigen Vierseits mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F (Fig. 16), so haben wir zunächst

Fig. 16.



$$2P=A+B,\quad 2Q=C+D,\quad 2R=E+F.$$

Der Punkt D ist eine Vielfachensumme der Punkte A, B und C, es sei

$$D=mA+nB+pC,\quad m+n+p=1.$$

Damit wird

$$2Q=mA+nB+(p+1)C.$$

Für die Punkte E und F erhalten wir, indem sie Schnittpunkte gegebener Geraden sind,

$$E\equiv mA+vC\equiv\ D+uB=mA+(n+u)B+pC,$$

$$F\equiv nB+vC\equiv uA+\ D=(m+u)A+nB+pC,$$

woraus durch Elimination von u und v folgt

$$(m+p)E=mA+pC,\quad (n+p)F=nB+pC.$$

Dadurch geht die Gleichung für den Punkt R über in

$$2R=\frac{mA+pC}{m+p}+\frac{nB+pC}{n+p},$$

oder

$$2R=\frac{m(n+p)A+n(m+p)B+[2p^2+(m+n)p]C}{(m+p)(n+p)}.$$

Beachten wir, dafs $m+n+p=1$ ist, so können wir schreiben

$$2(1-m)(1-n)R=m(1-m)A+n(1-n)B+p(1+p)C,$$

und wenn wir den obigen Wert von $2Q$ berücksichtigen, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}2(1-m)(1-n)R&=mn(A+B)+2pQ\\&=2mnP+2pQ,\end{aligned}$$

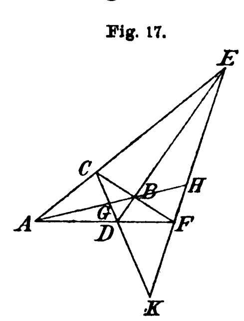
mithin ist

$$(1-m)(1-n)R-mnP-pQ=0,\qquad (1-m)(1-n)-mn-p=0$$

Weil hiernach die Punkte P, Q und R in einer Zahlbeziehung stehen, so liegen sie in einer geraden Linie.

7) „In jedem vollständigen Vierseite wird jede seiner drei Diagonalen durch die beiden Eckpunkte und die Schnittpunkte mit den anderen Diagonalen harmonisch geteilt und zwar so, dafs die Eckpunkte das eine Paar, die Schnittpunkte der Diagonalen das andere Paar zugeordnete Punkte sind.“

Fig. 17.



Sei $ABCD$ (Fig. 17) das vollständige Vierseit mit den Diagonalen AB, CD und EF.

a) Es sind A, B, G, H harmonische Punkte. Der Punkt E läfst sich ausdrücken durch

$$E = cC - aA = bB - dD. \qquad (1)$$

Nun ist

$$aA + uB = cC + vD = gG. \qquad (2)$$

Entnehmen wir aus (1) die Werte von C und D und setzen sie in (2) ein, so wird

$$aA + uB = aA + \left(1 - \frac{v}{d}\right)E + v\frac{b}{d}B,$$

d. h. es mufs $v = d$ und $u = b$ sein, so dafs wir haben

$$aA + bB = cC + dD = gG. \qquad (2')$$

Ferner können wir setzen

$$bB - uC = dD - vA = fF.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, wenn wir die Werte von C und D aus (1) entnehmen,

$$\left(\frac{a}{c}u - v\right)A + \left(\frac{u}{c} - 1\right)E = 0,$$

d. h.

$$u = c, \quad v = a,$$

mithin ist

$$bB - cC = dD - aA = fF. \qquad (3)$$

Weiter haben wir

$$bB - uA = E + vF = hH,$$

so dafs, wenn wir in die erste dieser Gleichungen den Wert von F aus (3) einsetzen und den Wert von cC aus (1) entnehmen,

$$(a - u)A + b\left(1 - \frac{v}{f}\right)B + \left(\frac{v}{f} - 1\right)E = 0,$$

d. h.

$$u = a, \quad v = f,$$

womit sich ergiebt

$$bB - aA = E + fF = hH. \qquad (4)$$

Nun folgt aus (2′) und (4)

$$G = \frac{aA + bB}{a + b}, \quad H = \frac{aA - bB}{a - b},$$

daher sind A, B und G, H vier harmonische Punkte.

b) Ferner sind die Punkte C, D; G, K harmonisch.

Wir haben nämlich

$$dD - cC = fF - E = kK,$$

$$K = \frac{dD - cC}{d - c}, \quad G = \frac{dD + cC}{d + c}.$$

c) Endlich sind E, F; H, K harmonische Punkte.

Denn es ist

$$H = \frac{fF + E}{f + 1}, \quad K = \frac{fF - E}{f - 1}.$$

Rechnen wir abgekürzt, mit Punktgröfsen von unbestimmten Gewichten, dann ist

$$\dot{E} = \dot{C} - \dot{A} = \dot{B} - \dot{D}, \quad \dot{G} = \dot{A} + \dot{B} = \dot{C} + \dot{D},$$

$$\dot{H} = \dot{B} - \dot{A} = \dot{E} + \dot{F}, \quad \dot{K} = \dot{D} - \dot{C} = \dot{F} - \dot{E},$$

und aus diesen Kongruenzen folgt unmittelbar, dafs A, B; G, H, ferner C, D; G, K und endlich E, F; H, K harmonische Punkte sind.

8) Von einer geraden Linie seien die Punkte A und B durch die Gleichungen gegeben

$$aA = \sum_{k=1}^{k=3} a_k E_k, \quad bB = \sum_{k=1}^{k=3} b_k E_k, \quad a = \sum_{k=1}^{k=3} a_k, \quad b = \sum_{k=1}^{k=3} b_k$$

und es sei ihre Gleichung, bezogen auf die Eckpunkte des Fundamentaldreiecks aufzustellen.

Ist U ein die gerade Linie beschreibender Punkt, so ist, weil sie durch A und B geht,

$$u'U = A + vB, \quad u' = 1 + v.$$

Aus dieser Punktgleichung folgt

$$u'aU = aA + \frac{v}{b} abB,$$

oder, mit $u'a = u$, $v\frac{a}{b} = t$,

$$uU = aA + btB.$$

Setzen wir in diese Gleichung die obigen Werte von aA und bB ein und formen etwas um, so ergiebt sich

$$uU = (a_1 + b_1 t)E_1 + (a_2 + b_2 t)E_2 + (a_3 + b_3 t)E_3,$$

oder, mit $a_1 + a_2 + a_3 = a$, $b_1 + b_2 + b_3 = b$, da dann $u = a + bt$ ist,

$$(a + bt)U = (a_1 + b_1 t)E_1 + (a_2 + b_2 t)E_2 + (a_3 + b_3 t)E_3,$$

womit die gewünschte Gleichung gefunden ist, die Koeffizienten der Fundamentalpunkte in ihr sind lineare Funktionen einer und derselben Variablen.

Soll umgekehrt die Gleichung

$$uU = u_1E_1 + u_2E_2 + u_3E_3, \quad u = u_1 + u_2 + u_3,$$

mit dem variablen Koeffizienten u_k, $k = 1, 2, 3$, eine gerade Linie bedeuten, so müssen diese Koeffizienten Funktionen ersten Grades einer und derselben Variablen sein.

9) Jede Ebene ist durch drei Punkte derselben bestimmt. — Seien A, B und C drei durch

$$aA = \sum_{k=1}^{k=4} a_k E_k, \quad bB = \sum_{k=1}^{k=4} b_k E_k, \quad cC = \sum_{k=1}^{k=4} c_k E_k$$

gegebene Punkte des Raumes. Die Gleichung der durch die Punkte A und B gehenden geraden Linie, welche in der Ebene der Punkte A, B und C liegt, ist

$$U' \equiv aA + tbB,$$

ferner ist die durch den Punkt U' dieser Geraden, für welchen t einen bestimmten Wert besitzt, und den Punkt C laufende, ebenfalls in der Ebene der Punkte A, B und C liegende gerade Linie durch die Gleichung gegeben

$$U \equiv aA + tbB + ucC.$$

Denken wir uns nun, daſs die Koeffizienten t und u reelle Zahlen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ durchlaufen, so stellt die letzte Gleichung eine Schaar von geraden Linien dar, welche alle durch den Punkt C gehen, ein Strahlenbüschel mit dem Zentrum C, und in der Ebene der Punkte A, B, C liegen, so daſs dieses Strahlenbüschel diese Ebene ausmacht. Mithin ist die vorstehende Gleichung eine Punktgleichung dieser Ebene. Setzen wir in sie die Werte der gegebenen Punktgröſsen, so ergiebt sich als allgemeine Punktgleichung einer Ebene

$$U \equiv \sum_{k=1}^{k=4} (a_k + b_k t + c_k u) E_k,$$

es sind in ihr die Koeffizienten der Fundamentalpunkte lineare Funktionen zweier voneinander unabhängigen Variablen.

Zweites Kapitel.

Der Drehungsfaktor.

---

§ 1. Begriff des Winkels.

Die Bewegung von Strecken war bisher eine translatorische, durch ihre Parallelverschiebung gelangten wir zu dem Begriffe der Summe von Strecken. Die einfachste Bewegung ist die Rotation, die Drehung um einen Punkt, wenn sie die Bewegung in einer Ebene, oder um eine Axe, wenn sie ein räumliches System betrifft. Die Translation ist nur ein spezieller Fall der Rotation, nämlich die Drehung um einen unendlich fernen Punkt, oder diejenige um eine unendlich ferne Axe. Dreht sich eine gerade Linie um einen ihrer Punkte, so beschreibt sie das, was wir einen Winkel nennen, vorausgesetzt, daſs diese Drehung in einer Ebene stattfindet.

Der Winkel ist der Richtungsunterschied einer geraden Linie in ihrer Anfangs- und ihrer Endlage, wenn diese Gerade in einer Ebene um einen ihrer Punkte sich dreht, es kommt ihm die Eigenschaft der Gröſse zu.

Um die Vieldeutigkeit eines Winkels zu beseitigen, setzen wir fest, daſs der von einer geraden Linie beschriebene Winkel der Richtungsunterschied des positiven Teiles der Geraden in ihrer Endlage und desselben Teiles der Geraden in ihrer Anfangslage sei.

Unter dem Winkel zweier sich schneidenden geraden Linien verstehen wir den Teil der durch sie bestimmten Ebene, welchen die eine Gerade als die erste beschreibt, wenn sie sich um den Schnittpunkt beider Geraden so aus ihrer Lage dreht, daſs die Punkte ihres positiven Teiles sich nach den Punkten des positiven Teiles der zweiten Geraden bewegen, ohne daſs sie die Punkte des negativen Teiles der zweiten Geraden passieren, und schlieſslich die positiven Teile beider geraden Linien zusammenfallen.

Dreht sich eine gerade Linie um einen ihrer Punkte in einer Ebene, welcher stets mit ein und demselben Punkte der Ebene zu-

sammenfällt, so beschreibt jeder andere Punkt dieser Linie ein System erster Stufe, eine Kurve, welches die Eigentümlichkeit besitzt, dafs alle seine Punkte von dem festen Punkte um Strecken gleicher Länge abweichen, dafs die Kurve sich schliefst, wenn die Gerade eine volle Umdrehung gemacht hat. Ein solches Punktsystem nennen wir eine Kreislinie, den festen Punkt ihren Mittelpunkt, den Abstand irgend eines seiner Elemente vom festen Punkte Halbmesser oder Radius. Wegen der eben genannten karakteristischen Eigenschaft einer Kreislinie sind alle Kreislinien ähnliche Kurven.

Sind $\bar{g}_1$ und $\bar{g}_2$ zwei im Punkte O sich schneidende gerade Linien, welche eine Ebene bestimmen, so kann eine Gerade $\bar{g}$ aus der Lage $\bar{g}_1$ in die Lage $\bar{g}_2$ auf doppelte Weise durch Drehung um den Punkt O übergeführt werden. Entweder kann die Gerade $\bar{g}$ den Winkel der Geraden $\bar{g}_1$ und $\bar{g}_2$ beschreiben, oder sie kann sich so drehen, vorausgesetzt, dafs anfangs ihr positiver Teil mit dem positiven Teile von $\bar{g}_1$ zusammenfalle, dafs ihr positiver Teil die negativen Teile der Geraden $\bar{g}_2$ und $\bar{g}_1$ passiert, ehe er mit dem positiven Teile von $\bar{g}_2$ zusammenfällt, alsdann ist die Drehung entgegengesetzten Sinnes wie vorher, aber auch der beschriebene Winkel ist ein anderer denn vorher. Setzen wir die erste Drehung als im positiven Sinne erfolgend fest, so ist die zweite Drehung wegen ihres entgegengesetzten Sinnes als eine negative aufzufassen.

Der Schnittpunkt O zweier geraden Linien bedingt nur ihre Lage, denn wenn $\bar{g}_1$ durch Richtungsänderung aus der Lage $\bar{g}_1$ in die Lage $\bar{g}_2$ übergegangen ist, so ist ihre neue Lage nur von dem Punkte 0 abhängig. Durch gleich grofse Richtungsänderungen oder Drehungen einer geraden Linie um verschiedene ihrer Punkte entstehen nur gleichgerichtete gerade Linien, so dafs, wenn zwei gerade Linien gegen eine dritte gerade Linie gleiche Richtungsunterschiede besitzen, die beiden ersteren gleiche Richtungen haben, und umgekehrt.

§ 2. **Das analytische Maafs eines Winkels.**

Gewöhnlich messen wir einen Winkel durch die Länge des Bogens eines Kreises vom Halbmesser Eins, dessen Mittelpunkt mit dem Schnittpunkte seiner Schenkel zusammenfällt, welcher Bogen durch die positiven Teile der den Winkel begrenzenden Geraden aus dem Kreise geschnitten wird, oder mittelst des bekannten Winkelmaafses durch Grade, Minuten und Sekunden.

Für uns handelt es sich darum, ein analytisches Maafs festzusetzen, durch welches die Rotation zum Ausdruck gebracht wird.

Dreht sich eine gerade Linie in einer Ebene fortwährend in demselben Sinne um einen Punkt in ihr, dann nimmt sie nach und nach alle möglichen Richtungen in der Ebene an und kehrt, wenn sich eine volle Umdrehung vollzogen hat, wieder in ihre Anfangslage zurück. Denken wir uns auf einer um den Punkt O in ihr rotierenden Geraden eine feste Strecke $\overline{OA} = \alpha$, positiv in positivem Sinne der Geraden, OA als Anfangslage der Geraden, dann fällt nach einer vollen Umdrehung α wieder mit $\overline{OA}$ zusammen, wodurch wir für diese Drehung haben

$$\alpha = \alpha, \quad \text{oder} \quad (+1)\alpha = \alpha,$$

so dafs eine ganze Umdrehung durch den Faktor $(+1)$ ausgedrückt werden kann.

Nach einer gewissen Rotation der Geraden gelangt die Strecke $\overline{OA}$ in die ihr entgegengesetzten Lage $\overline{OA_1}$ (Fig. 18), so dafs $-\overline{OA} = \overline{OA_1}$, oder

Fig. 18.

$$(-1)\alpha = -\alpha$$

ist. Der Faktor (-1) drückt dabei aus, dafs die Strecke, resp. die Gerade durch Drehung in die entgegengesetzte Lage gebracht worden sei, und der dieser Rotation entsprechende Winkel wird ein gestreckter Winkel genannt.

Nun ist aber

$$(-1)\{(-1)\alpha\} = (-1)^2\alpha = \alpha,$$

daher führt eine weitere gleichgrofse Rotation die Gerade in ihre ursprüngliche Lage zurück, woraus folgt, dafs der gestreckte Winkel die Hälfte eines geschlossenen Winkels ist.

Sei x der unbekannte Faktor, welcher die Strecke α um ihr Anfangselement aus ihrer Anfangslage durch die Hälfte eines gestreckten Winkels in die Lage β dreht. Dann müssen die Gleichungen bestehen

$$x\alpha = \beta, \quad x\beta = -\alpha,$$

woraus folgt

$$x(x\alpha) = -\alpha, \quad x^2\alpha = -\alpha, \quad x^2 = -1,$$

so dafs der unbekannte Faktor

$$x = \sqrt{-1} = i$$

ist. Demnach ist

$$i\alpha = \beta, \quad i\beta = i^2\alpha = -\alpha,$$

$$i(-\alpha) = i^2\beta = -\beta, \quad i(-\beta) = i^2(-\alpha) = \alpha,$$

$$i\alpha = \beta, \quad i^2\alpha = -\alpha, \quad i^3\alpha = -\beta, \quad i^4\alpha = \alpha.$$

Die Multiplikation einer Strecke, resp. einer geraden Linie mit dem Faktor $i = \sqrt{-1}$ drückt aus, dafs dieselbe aus einer Anfangsrichtung in positivem Sinne um ihr Anfangselement, resp. einen ihrer Punkte in eine Richtung zu drehen sei, welcher die Hälfte eines gestreckten, der vierte Teil eines vollen, d. h. ein rechter Winkel entspricht, dessen Schenkel senkrecht oder normal zu einander seien, wie wir zu sagen pflegen.

Den rechten Winkel brauchen wir als das Maafs aller Drehungen, so dafs die Zahl i als das Maafs für die Richtungsänderung einer geraden Linie in dem als positiv festgesetzten Drehungssinn für einen rechten Winkel gilt.

Rotiert eine Strecke um ihr Anfangselement aus der Lage α in die Lage γ um m rechte Winkel, unter m eine positive ganze Zahl verstanden, so ist nach dem Vorigen

$$\gamma = i^m \alpha.$$

Dreht sich nun eine Strecke um ihr Anfangselement aus der Lage α in die beliebige Lage γ und ist diese Rotation gleich dem $m$fachen eines rechten Winkels, wobei m irgend eine reelle Zahl bedeutet, so drückt die vorstehende Gleichung ebenfalls diese Rotation aus. Deshalb nennen wir den Faktor i^m den Drehungsfaktor.

Messen wir den Winkel in der vorhin beregten Weise durch die Länge eines Kreisbogens und bezeichnen wir dieselbe mit $\mathfrak{w}$, so ist $m = \mathfrak{w} : \frac{1}{2}\pi = 2\mathfrak{w} : \pi$, wodurch wir schreiben dürfen

$$\gamma = i^m \alpha = i^{\frac{2\mathfrak{w}}{\pi}} \alpha. \tag{1}$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\frac{\gamma}{\alpha} = i^m = i^{\frac{2\mathfrak{w}}{\pi}}. \tag{2}$$

Der Quotient aus zwei Einheitsstrecken, resp. zwei Richtungen ist gleich dem durch sie bestimmten Drehfaktor.

Nehmen wir γ als die erste, α als die zweite Strecke, resp. Gerade, dann entsteht der von beiden eingeschlossene Winkel in entgegengesetztem Sinne, wie vorher, es ist

$$\alpha = i^{-m} \gamma = i^{-\frac{2\mathfrak{w}}{\pi}} \gamma,$$

$$\frac{\alpha}{\gamma} = i^{-m} = i^{-\frac{2\mathfrak{w}}{\pi}}.$$

Mit $m = 0$ ergiebt sich aus (1) und (2)

$$\gamma = i^0 \alpha = \alpha, \quad \frac{\gamma}{\alpha} = i^0 = 1.$$

Der Quotient aus zwei gleichartigen Einheitsstrecken oder Richtungen ist äquivalent der absoluten Einheit.

§ 3. Anwendung des Drehfaktors.

1) Dreht sich eine gerade Linie in einer Ebene um ihren Punkt O zuerst durch den Winkel m, sodann durch den Winkel n, ist p der durch diese beiden aufeinander folgenden Drehungen erzeugte Winkel, α die Einheitsstrecke der Geraden in ihrer Anfangslage, β dieselbe, nachdem der Winkel m erzeugt worden ist, γ die Einheitsstrecke der Geraden in ihrer Endlage, so haben wir

$$\beta = i^m \alpha, \quad \gamma = i^n \beta = i^p \alpha,$$

daher ist

$$\gamma = i^n i^m \alpha = i^{m+n} \alpha = i^p \alpha,$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} = i^{m+n} = i^p, \quad p = m + n.$$

Mit $m = n$ ist β die Mittelrichtung der Geraden α und γ, für die Halbierungslinie des Winkels $p = 2m$ besteht die Relation

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} = i^m = i^{\frac{1}{2}p}.$$

Diese Beziehungen bleiben bestehen, wenn die Drehungen der geraden Linie um verschiedene ihrer Punkte erfolgen.

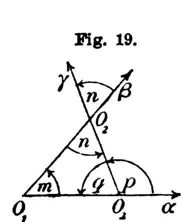


Fig. 19.

Sind O_1, O_2 und O_3 (Fig. 19) die Eckpunkte eines Dreiecks, α, β und γ die Einheitsstrecken seiner Seiten $(O_3 - O_1)$, $(O_2 - O_1)$ und $(O_2 - O_3)$ resp., ist

$$\frac{\beta}{\alpha} = i^m, \quad \frac{\gamma}{\beta} = i^n, \quad \frac{\gamma}{\alpha} = i^p,$$

so ist

$$\frac{\gamma}{\alpha} = i^{m+n} = i^p, \quad m + n = p.$$

„Die Summe aus je zwei Innenwinkeln eines Dreiecks ist gleich dem gegenüberliegenden Aufsenwinkel dieses Dreiecks.“

Mit $p + q = 2$ ergiebt sich weiter

$$m + n + q = 2.$$

„Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks ist zwei rechten Winkeln gleich.“

2) Eine Strecke $(B - A)$ drehe sich in einer Ebene um einen Punkt O dieser Ebene aufserhalb ihr und sie komme dadurch in die Lage $(B_1 - A_1)$ (Fig. 20).

Es ist immer

$$(B - A) = (B - O) - (A - O).$$

Ist nun

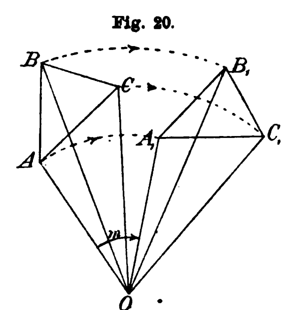
$$i^m(B - O) = (B_1 - O), \quad i^m(A - O) = (A_1 - O),$$

so folgt

$$i^m(B - A) = (B_1 - A_1),$$

woraus hervorgeht, dafs die Richtungen der Strecke in ihrer Anfangs- und ihrer Endlage einen, dem Rotationswinkel gleichen Winkel dann mit einander einschliefsen, dafs die Seiten eines Dreiecks, wenn es sich um einen seiner Eckpunkte dreht, gleiche Winkel beschreiben.

Fig. 20.



3) Ein Dreieck sei in seiner Ebene aus der Lage ABC in die Lage $A_1B_1C_1$ (Fig. 20) übergegangen.

Dann ist

$$(B_1 - A_1) = i^m(B - A),$$
$$(C_1 - A_1) = i^n(C - A),$$
$$(C_1 - B_1) = i^p(C - B).$$

Nun läfst sich die letzte Relation schreiben

$$(C_1 - A_1 - B_1 + A_1) = i^p(C - A - B + A),$$

mithin mufs sein

$$i^n(C - A) - i^m(B - A) = i^p(C - A) - i^p(B - A),$$

oder

$$(i^n - i^p)(C - A) + (i^p - i^m)(B - A) = 0,$$

welche Gleichung nur dann bestehen kann, wenn

$$m = n = p$$

ist, so dafs die Richtungslinien der homologen Dreiecksseiten den nämlichen Winkel mit einander einschliefsen, jede Dreiecksseite um denselben Winkel sich gedreht hat.

Ist nun zunächst O ein beliebiger Punkt der Ebene, dann haben wir die Gleichungen

$$(B - A) = (B - O) - (A - O), \quad (C - B) = (C - O) - (B - O),$$
$$(B_1 - A_1) = (B_1 - O) - (A_1 - O), \quad (C_1 - B_1) = (C_1 - O) - (B_1 - O),$$

folglich ist

$$(B_1 - O) - (A_1 - O) = i^m(B - O) - i^m(A - O),$$
$$(C_1 - O) - (B_1 - O) = i^m(C - O) - i^m(B - O).$$

Wählen wir jetzt den Punkt O so, dafs

$$(A_1 - O) = i^m(A - O), \quad \text{oder } \frac{B - A}{A - O} = \frac{B_1 - A_1}{A_1 - O}$$

wird, wodurch der Punkt O eindeutig bestimmt ist, dann ist auch

$$(B_1 - O) = i^m(B - O), \quad (C_1 - O) = i^m(C - O).$$

Das Dreieck läfst sich demnach aus der Lage ABC in die Lage $A_1B_1C_1$ durch Rotation um den Punkt O seiner Ebene überführen. Der Drehpunkt fällt mit dem Schnittpunkte der in den Mitten der Verbindungsstrecken der homologen Ecken der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ errichteten Normalen zusammen.

In seiner Raumlehre (B. G. Teubner, 1872 und 1875) hat V. Schlegel zuerst gezeigt, welchen Wert der Begriff des Drehfaktors für die Geometrie hat, für die Mechanik ist er von besonderem Nutzen. In dem eben genannten Buche findet der Leser weitere Beispiele zur Übung, worauf besonders verwiesen wird.

Drittes Kapitel.

Die äufsere Multiplikation von Strecken und von Punkten.

Erster Abschnitt.

Die äufsere Multiplikation von Strecken.

§ 1. Das äufsere Produkt aus zwei Strecken.

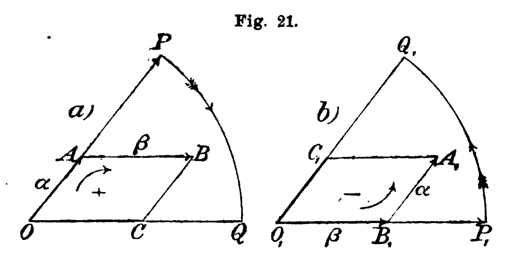
Zwei sich schneidende gerade Linien bestimmen eine Ebene. Bewegen sich die Punkte der einen geraden Linie parallel der anderen, als fest angesehenen geraden Linie in doppeltem Sinne, so erzeugt sie diese Ebene, und weil jede der beiden geraden Linien als die feste gewählt werden kann, so ist in zweifacher Weise durch Parallelbewegung die Ebene erzeugbar. Dreht sich eine durch den Schnittpunkt der beiden geraden Linien gehende dritte gerade Linie in der Ebene der beiden ersteren um diesen Punkt in demselben Sinne, bis sie wieder in ihre Anfangslage zurückkehrt, so beschreibt sie die ganze Ebene, und dasselbe geschieht auch durch eine volle Umdrehung der dritten Geraden um denselben Punkt in entgegengesetztem Sinne, wodurch mit Rücksicht auf Rotation die Ebene als in positivem oder negativem Sinne erzeugt erscheint.

Bewegt sich eine Strecke so, dafs alle ihre Punkte gleiche Strecken beschreiben, dann entsteht ein ebener, allseitig von Strecken begrenzter Flächenraum, dessen Grenzen besitzen in ihrer Gesamtheit die Gestalt eines Parallelogramms oder Spatheckes, das Gebilde selbst ist ein vollständig begrenztes System zweiter Stufe, eine Gröfse. Dreht sich in einer Ebene eine Strecke um ihr Anfangselement in demselben Sinne, bis sie wieder in ihre Anfangslage zurückkehrt, so beschreibt sie ein vollständig begrenztes System zweiter Stufe, nämlich eine Kreisfläche, dasselbe geschieht, wenn sie um ihr Anfangselement eine volle Rotation in entgegengesetztem Sinne macht. Dreht sich eine Strecke um ihr Anfangselement in einer Ebene durch einen bestimmten Winkel,

welcher kleiner als ein voller Winkel ist, so erzeugt sie einen Teil einer Kreisfläche, je nachdem die Rotation dabei in positivem oder negativem Sinne erfolgte, ist dieser Kreisausschnitt als in positivem oder negativem Sinne entstanden anzusehen. Ein in einem solchen Kreisausschnitte liegendes Spatheck als Teil desselben hat demnach ebenfalls zweierlei Entstehungssinn.

Seien (Fig. 21, a, b) zwei mit Rücksicht auf ihren Entstehungssinn entgegengesetzt gleiche Kreisausschnitte OPQ und $O_1P_1Q_1$ gegeben, für welche $(P_1 - O_1) = (Q - O)$, $(Q_1 - O_1) = (P - O)$, $(Q - O) = i^m(P - O)$, $(Q_1 - O_1) = i^{-m}(P_1 - O_1) = i^{-m}(Q - O)$ ist, so dafs, wenn wir dem ersten Kreisausschnitte positiven Entstehungssinn beilegen, der zweite in negativem Sinne entstanden erscheint. Seien ferner $OABC$ und $O_1C_1A_1B_1$ zwei in diesen Kreisausschnitten liegende Spathecke von gleicher Gestalt und Gröfse, $(A - O) = (B - C) = (C_1 - O_1) = (A_1 - B_1) = \alpha$, $(B - A) = (C - O) = (B_1 - O_1) = (A_1 - C_1) = \beta$, so erscheinen diese als Teile der beiden Kreisausschnitte ebenfalls von entgegengesetztem Entstehungssinn, wodurch allein sie sich von einander unterscheiden.

Fig. 21.



Beschreibt ein von O ausgehender Punkt die Strecken $(A - O)$ und $(B - A)$ nacheinander, so giebt sein Gesamtbewegungssinn den Entstehungssinn des Parallelogrammes $OABC$, und erzeugt ein von O_1 ausgehender Punkt nacheinander die Strecken $(B_1 - O_1)$ und $(A_1 - B_1)$, so repräsentiert sein Gesamtbewegungssinn den Entstehungssinn des Parallelogrammes $O_1B_1A_1C_1$.

Das Parallelogramm $OABC$ können wir uns auch so entstanden denken, dafs die Gerade OP um ihren Punkt O im Sinne des Pfeiles durch den Winkel m rotiert, wodurch sie in die Lage OQ gelangt, und dabei ein variabler Punkt auf ihr zuerst die Strecke $(B - A)$, sodann die Strecke $(C - B)$ beschreibt. Entsprechendes gilt für die Entstehung des Parallelogrammes $O_1B_1A_1C_1$.

Die Entstehung der Fläche eines Parallelogrammes, welches durch zwei in einer seiner Ecken zusammenstofsenden Seiten α und β vollständig bestimmt ist, resp. der beiden Spathecke $OABC$ und $O_1B_1A_1C_1$ läfst sich aber auch noch anders auffassen. Bewegt sich die Strecke $(C - O) = \beta$ so, dafs alle ihre Punkte Strecken $(A - O) = \alpha$ beschreiben, dann gelangt sie aus der Lage $(C - O)$ in die Lage $(B - A) = \beta$ und erzeugt so die Parallelogrammfläche $OABC$, indem die Endelemente

der Strecke β in allen ihren Lagen zwischen $(C - O)$ und $(B - A)$ die Strecke $(B - C) = \alpha$ ausmachen. Sehen wir dagegen $(B_1 - O_1) = \beta$ als fest an, verschieben wir die Strecke $(C_1 - O_1) = \alpha$ so parallel mit sich selbst, dafs ihr Anfangselement die Strecke $(B_1 - O_1) = \beta$ durchläuft, dann ist ihre Endlage $(A_1 - B_1) = \alpha$ und sie hat dadurch das Spatheck $O_1 B_1 A_1 C_1$ beschrieben. Im ersten Falle ist der Sinn der Entstehung der Fläche derjenige von $(A - O)$ und $(B - A)$ zusammengenommen, im zweiten von $(B_1 - O_1)$ und $(A_1 - B_1)$ zusammengenommen, wodurch das zweite Parallelogramm als im entgegengesetzten Sinne wie das erste erzeugt erscheint, so dafs, wenn wir den Entstehungssinn der ersten Fläche als positiv annehmen, derjenige der zweiten als negativ aufzufassen ist.

Weil das Parallelogramm $OABC$ durch die Strecken $(A - O) = \alpha$ und $(B - A) = \beta$ vollständig bestimmt ist, so wird eine gewisse Verknüpfung der Strecken α und β dessen Fläche mit Rücksicht auf ihren Entstehungssinn ausdrücken.

Lassen wir, indem wir als allgemeines Verknüpfungszeichen das Zeichen $\circ$ wählen, $\alpha \circ \beta$ die in positivem Sinne entstandene Spatheckfläche $OABC$ bedeuten, so ist offenbar mit $\beta \circ \alpha$ dieselbe Fläche, aber mit entgegengesetztem, mit negativem Entstehungssinn gegeben. Für unsere Verknüpfung haben wir mithin als erstes Gesetz

$$(\alpha \circ \beta) = -(\beta \circ \alpha). \tag{1}$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$(\alpha \circ \beta) + (\beta \circ \alpha) = 0.$$

Mit $\beta = m\alpha$ erhalten wir hieraus, weil die Multiplikation einer Strecke mit einer Zahl den Karakter der ersteren nicht ändert,

$$2(\alpha \circ m\alpha) = 0,$$

oder

$$(\alpha \circ m\alpha) = 0, \tag{2}$$

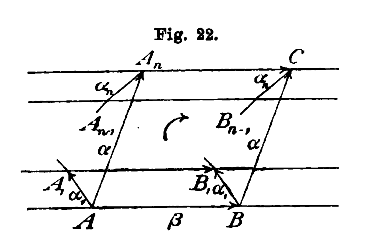


Fig. 22.

was das Verschwinden des Ergebnisses der Verknüpfung bedeutet, wenn ihre Glieder gleichartig, wenn α und β parallel sind. Überdies erkennen wir, dafs wenn $\beta = m\alpha$ ist, die Fläche des Spatheckes der Strecken α und β verschwindet, weshalb auch aus diesem Grunde die Gleichung (2) zu Recht bestehen mufs.

Sei in dem ebenen Polygone $AA_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ (Fig. 22)

$$\overline{AA_n} = \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \cdots + \overline{A_{n-1}A_n}$$

oder

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n.$$

Lassen wir dieses geschlossene Polygon in seiner Ebene um die Strecke $\overline{AB} = \beta$ translieren, wodurch es in die Lage $BB_1B_2 \dots . C$ gelangt, dann beschreiben seine sämtlichen Seiten Spathecke, welche alle teilweise durch Strecken β begrenzt sind, und es ist

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 \circ \beta + \alpha_2 \circ \beta + \cdots + \alpha_n \circ \beta = \alpha \circ \beta = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \circ \beta, \\ \beta \circ \alpha_1 + \beta \circ \alpha_2 + \cdots + \beta \circ \alpha_n = \beta \circ \alpha = \beta \circ (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n), \\ \{\alpha - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\} \circ \beta = 0. \end{array}\right\} (3)$$

Aus diesen Gleichungen resultiert der Satz:

Bewegt sich eine Strecke in einer Ebene zwischen zwei festen parallelen Geraden in der Weise fort, dafs sie anfangs in der einen, zuletzt in der anderen liegt und in allen ihren Lagen die gleiche Richtung besitzt, dann ist der dadurch erzeugte Flächenraum stets gleich grofs, auf welchem geraden, gebrochenen oder krummlinigen Wege die Elemente der Strecke sich dahin auch bewegt haben mögen, sobald nur der angenommene Entstehungssinn festgehalten wird. Bewegen sich in einer Ebene die sämtlichen Punkte einer geschlossenen Figur in parallelen geraden Linien, so ist der durch diese Figur erzeugte Flächenraum stets gleich Null.

Mit $\alpha = \alpha_1 + m\beta$ erhalten wir

$$\alpha \circ \beta = (\alpha_1 + m\beta) \circ \beta = \alpha_1 \circ \beta + m\beta \circ \beta,$$

aber $m\beta \circ \beta$ verschwindet, folglich ist

$$\alpha \circ \beta = \alpha_1 \circ \beta.$$

Spathecke zwischen zwei parallelen Geraden mit gleichen Seiten auf diesen Geraden sind flächengleich.

Nach den Gleichungen (1), (2) und (3) besitzt unsere Verknüpfung folgende Eigenschaften. Die Glieder der Verknüpfung sind nur mit Zeichenwechsel gegenseitig vertauschbar, wenn das Ergebnis sich nicht ändern soll. Das Ergebnis der Verknüpfung verschwindet, wenn ihre beiden Glieder gleichartig (parallel) sind. Die Verknüpfung ist vollkommen distributiv. Demnach ist die Verknüpfung eine multiplikative.

Diese Multiplikation drücken wir durch blofses Aneinanderschreiben der Faktoren des Produktes aus, so dafs wir haben

$$\alpha\beta = -\beta\alpha, \quad m\alpha \cdot \alpha = 0,$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma), \quad \beta\alpha + \gamma\alpha = (\beta + \gamma)\alpha.$$

Das Produkt $\alpha\beta$ aus den Strecken α und β nennen wir ein äufseres Produkt, weil dasselbe nur dann geltenden Wert hat, wenn seine Faktoren aufser einander liegen, wenn sie ungleichartige Strecken, wenn sie nicht einer Geraden parallel sind.

Das äufsere Produkt aus zwei Strecken ist gleich der Fläche des durch diese Strecken bestimmten Parallelogrammes mit Rücksicht auf ihren Entstehungssinn, es verschwindet, wenn seine Faktoren gleichartige Strecken sind. Die Faktoren eines solchen Produktes können nur mit Zeichenwechsel bei Festhaltung des Ergebnisses vertauscht werden. Besitzen zwei oder mehrere äufsere Produkte aus je zwei Strecken einen gemeinsamen Faktor, so ist die Summe dieser Produkte gleich dem Produkte aus der Summe der nicht gemeinschaftlichen Faktoren und dem gemeinschaftlichen Faktor, vorausgesetzt, dafs in den Partialprodukten der gemeinschaftliche Faktor die zweite Stelle einnimmt, oder auf dieselbe gebracht worden ist.

Das äufsere Produkt aus zwei Strecken ist eine Gröfse zweiter Stufe.

Ist $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2$, $\beta = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2$, so ergiebt sich

$$\alpha\beta = (a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2)(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)$$
$$= a_1b_1\varepsilon_1\varepsilon_1 + a_2b_1\varepsilon_2\varepsilon_1 + a_1b_2\varepsilon_1\varepsilon_2 + a_2b_2\varepsilon_2\varepsilon_2,$$

aber $\varepsilon_1\varepsilon_1 = \varepsilon_2\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_2\varepsilon_1 = -\varepsilon_1\varepsilon_2$, mithin wird

$$\alpha\beta = (a_1b_2 - a_2b_1)\varepsilon_1\varepsilon_2.$$

Sind $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ zwei Spatheckflächen, oder äufsere Streckenprodukte und besteht zwischen ihnen die Gleichung

$$\alpha\beta = m\gamma\delta, \tag{4}$$

dann fragt es sich, unter welchen Verhältnissen diese Gleichung richtig ist.

Ist ε eine zur Ebene von $(\alpha\beta)$ nicht parallele Strecke, so dürfen wir setzen

$$\gamma = c_1\alpha + c_2\beta + c_3\varepsilon, \quad \delta = d_1\alpha + d_2\beta + d_3\varepsilon,$$

womit wir erhalten

$$\gamma\delta = (c_1\alpha + c_2\beta + c_3\varepsilon)(d_1\alpha + d_2\beta + d_3\varepsilon).$$

Führen wir die Multiplikation auf der rechten Seite dieser Gleichung aus und ordnen wir hierauf die resultierenden Glieder nach den Streckenprodukten, so ergiebt sich

$$\gamma\delta = (c_1d_2 - c_2d_1)\alpha\beta + (c_2d_3 - c_3d_2)\beta\varepsilon + (c_3d_1 - c_1d_3)\varepsilon\alpha.$$

Nun müssen wir wegen (4) haben

$$\alpha\beta = m\,\{(c_1 d_2 - c_2 d_1)\alpha\beta + (c_2 d_3 - c_3 d_2)\beta\varepsilon + (c_3 d_1 - c_1 d_3)\varepsilon\alpha\},$$

Aber diese Gleichung kann nur dann befriedigt werden, wenn

$$1 = m(c_1 d_2 - c_2 d_1), \quad c_2 d_3 - c_3 d_2 = 0, \quad c_3 d_1 - c_1 d_3 = 0,$$

denn $\beta\varepsilon$ und $\varepsilon\alpha$ sind nicht Vielfache von $\alpha\beta$. Die beiden letzten Bedingungen geben

$$c_3 = d_3 = 0.$$

Daher mufs

$$\gamma = c_1\alpha + c_2\beta, \quad \delta = d_1\alpha + d_2\beta$$

sein, d. h. γ und δ müssen zu der Ebene von $(\alpha\beta)$ parallel sein, also müssen $(\alpha\beta)$ und $(\gamma\delta)$ in parallelen Ebenen liegen.

Zwei Spathecke sind nur dann einander gleich, wenn sie in derselben Ebene oder in parallelen Ebenen liegen, gleiche Ausdehnungen und denselben Entstehungssinn besitzen.

Spathecke in parallelen Ebenen heifsen gleichartige Spathecke.

Besteht die Gleichung

$$\alpha + \beta = \gamma$$

und multiplizieren wir sie der Reihe nach mit α, β und γ, so ergiebt sich

$$\alpha\beta = \alpha\gamma, \quad \beta\alpha = \beta\gamma, \quad \gamma\alpha + \gamma\beta = 0,$$

d. h.

$$\alpha\beta = \gamma\beta = \alpha\gamma.$$

Die über einer Diagonalen und jeder Seite eines Parallelogrammes konstruierten Parallelogramme sind mit diesem Parallelogramme flächengleich.

Es ist

$$m(\alpha\beta) = m\alpha\beta = (m\alpha)\beta = -\,m\beta\alpha = -\,(m\beta)\alpha = \alpha(m\beta).$$

Multiplikation eines äufseren Produktes aus zwei Strecken mit einer reellen Zahl ist Vervielfachung eines der Faktoren des Produktes mit dieser Zahl.

§ 2. Anwendung des äufseren Produktes aus zwei Strecken.

1) Jede der zwei Diagonalen eines Parallelogrammes zerlegt dasselbe in zwei kongruente, also auch in zwei flächengleiche Dreiecke. Denn wenn wir das eine dieser Dreiecke um den einen Endpunkt der

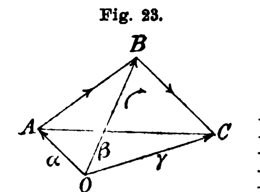
Diagonale durch einen gestreckten Winkel drehen, so ergeben sich zwei in allen Teilen übereinstimmende Dreiecke. Ist nun OAB ein Dreieck, $(A - O) = \alpha$, $(B - A) = \beta$, so ist sein Flächenraum, wenn wir denselben mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen,

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{2}(A - O)(B - A) = \frac{1}{2}\alpha\beta.$$

2) Der Flächenraum eines Dreiecks sei durch die Träger seiner Eckpunkte auszudrücken, wenn der Beziehungspunkt in der Ebene des Dreiecks liegt.

Es sei ABC das Dreieck, O der Beziehungspunkt, $(A - O) = \alpha$, $(B - O) = \beta$, $(C - O) = \gamma$ (Fig. 23), dann ist

Fig. 23.

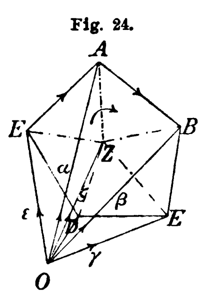


$$2\mathfrak{F} = (B - A)(C - A) = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha),$$
$$2\mathfrak{F} = \beta\gamma - \alpha\gamma - \beta\alpha = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha.$$

3) Ermittelung des Flächenraumes eines beliebigen ebenen Fünfecks, wenn die Träger seiner Eckpunkte bezüglich eines beliebigen Punktes seiner Ebene gegeben sind.

Es sei $ABCDE$ das Fünfeck (Fig. 24), bezüglich des Punktes O seien α, β, γ, δ, ε die Träger der Punkte A, B, C, D, E resp. ζ der Träger eines beliebigen in der Fläche des Viereckes gelegenen Punktes Z. Die Verbindungsstrecken des Punktes Z mit den Ecken des Fünfecks zerlegen letzteres in fünf Dreiecke, deren Flächensumme die Fläche des Fünfecks ausmacht. Nun ist, indem wir jedem dieser Dreiecke denselben Entstehungssinn zuschreiben,

Fig. 24.



$$2\triangle ZAB = \alpha\beta + \beta\zeta + \zeta\alpha,$$
$$2\triangle ZBC = \beta\gamma + \gamma\zeta + \zeta\beta,$$
$$2\triangle ZCD = \gamma\delta + \delta\zeta + \zeta\gamma,$$
$$2\triangle ZDE = \delta\varepsilon + \varepsilon\zeta + \zeta\delta,$$
$$2\triangle ZEA = \varepsilon\alpha + \alpha\zeta + \zeta\varepsilon,$$

und die Summe der linken Seiten dieser Gleichungen macht den doppelten Flächenraum des Fünfecks aus. Mithin ist, wenn wir den Flächenraum des Feldes mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen,

$$2\mathfrak{F} = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\alpha.$$

Daraus läfst sich unmittelbar auf die entsprechende Flächenformel für jedwedes Viereck schliefsen.

4) Gegeben sei ein Spatheck $(\alpha\beta)$. Dasselbe soll in ein flächengleiches Spatheck verwandelt werden, dessen Seiten mit denen des gegebenen Spatheckes parallel sind und von welchem eine Seite bekannt ist.

Seien α_1 und β_1 die Seiten des zu konstruierenden Spatheckes, dann mufs, weil Flächengleichheit beider Spathecke bestehen soll, zunächst sein

$$\alpha_1 \beta_1 = \alpha\beta.$$

Sind nun α und α_1, β und β_1 gleichartige Strecken, so ist

$$\alpha_1(\beta_1 + \alpha) = (\alpha + \beta_1)\beta, \quad \text{oder} \quad (\alpha + \beta_1)\alpha_1 + (\alpha + \beta_1)\beta = 0,$$

d. h.

$$(\alpha + \beta_1)(\alpha_1 + \beta) = 0,$$

folglich müssen $(\alpha + \beta_1)$ und $(\alpha_1 + \beta)$ parallele Strecken sein.

Sind die Seiten des gegebenen Spatheckes $OABC$ (Fig. 25) $(A - O) = \alpha$, $(B - A) = \beta$ und ist α_1 die bekannte Seite des zu suchenden Parallelogrammes, so zeichnen wir

$$(A_1 - O) = \alpha_1,$$

$$(D - O) = (A_1 - O) + (B - A) = (A_1 - O) + (D - A_1) = \alpha_1 + \beta,$$

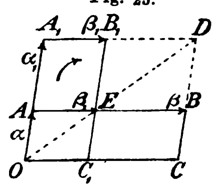


Fig. 25.

welche Strecke, resp. deren Verlängerung, die Strecke $(B - A)$, resp. deren Verlängerung, im Punkte E schneidet, alsdann mufs mit $(D - A)$ die Strecke $(\alpha + \beta_1)$ zusammenfallen, $(E - O) = (\alpha + \beta_1)$ sein, mithin ist $(E - A) = \beta_1$. Ziehen wir jetzt durch E die Parallele zu $\alpha_1 = (A_1 - O)$, welche $(D - A_1)$ und $(C - O)$ in den Punkten B_1 und C_1 resp. schneidet, so ist die Figur $OA_1B_1C_1$ das gewünschte Spatheck.

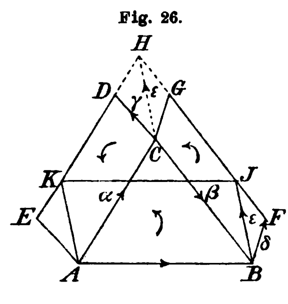


Fig. 26.

5) „Konstruieren wir über den Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ eines Dreiecks ABC (Fig. 26) irgend zwei Parallelogramme $ACDE$ und $CBFG$, deren verlängerten Seiten $\overline{ED}$ und $\overline{FG}$ sich in einem Punkte H schneiden, hierauf mit $\overline{AB}$ und $\overline{CH}$ das Parallelogramm $ABJK$, wobei wegen $\overline{BJ} = \overline{AK} = \overline{CH}$ die Punkte J und K mit den Geraden FH und EH zusammenfallen müssen, so ist die Summe der beiden ersten Parallelogramme gleich dem letzten Parallelogramme (Satz des Pappus)."

Setzen wir $\overline{AC} = \alpha$, $\overline{CB} = \beta$, $\overline{CD} = \gamma$, $\overline{BF} = \delta$, $\overline{CH} = \overline{BJ} = \varepsilon$, dann ist

$$\alpha\gamma = \alpha\varepsilon, \quad \beta\delta = \beta\varepsilon,$$

$$\alpha\gamma + \beta\delta = \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon = (\alpha + \beta)\varepsilon,$$

d. h.

$$\# \, ACDE + \# \, CBFG = \# \, ABJK.$$

6) Besteht die Gleichung

$$(A - O) + (B - O) = (C - O), \quad \text{oder} \quad \alpha + \beta = \gamma,$$

ist M ein beliebiger Punkt in der Ebene des Parallelogrammes $AOCB$, $(M - O) = \lambda$, so haben wir

$$\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\gamma, \quad \text{oder} \quad \lambda\alpha + \lambda\beta = \lambda\gamma,$$

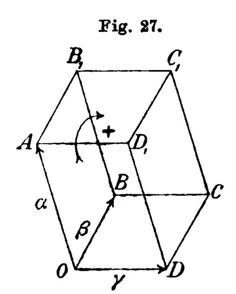
welche Gleichung den Satz ausdrückt:

„Die algebraische Summe der Produkte zweier gleichpoliger Strecken in Beziehung auf irgend einen Punkt der Ebene dieser Strecken ist gleich dem Produkte der Summe dieser Strecken bezüglich desselben Punktes. Liegt dieser Punkt aufserhalb des Scheitelwinkelraumes der Posten der Summenstrecke, welcher die letztere enthält, so ist die Summe der Produkte der Posten, liegt er innerhalb dieses Raumes, dann ist der Unterschied dieser Produkte gleich dem Produkte der Summenstrecke in Beziehung auf denselben Punkt. (Analogon: Satz von Varignon für Kräfte.)

§ 3. Das äufsere Produkt aus drei Strecken.

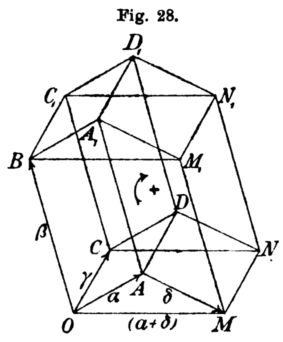
Bewegen sich die einzelnen Punkte eines Spatheckes parallel einer nicht in seiner Ebene gelegenen Richtung um eine Strecke von endlicher Länge fort, so erzeugt dasselbe ein allseitig von Spathecken begrenztes körperliches Gebilde, ein vollständig begrenztes System, eine Gröfse dritter Stufe, welches unter dem Namen Parallelopiped oder Spath bekannt ist.

Fig. 27.



Der Körperraum eines Spathes $OBCDAB_1C_1D_1$ (Fig. 27) mufs, weil der Spath durch drei in einer Ecke zusammenstofsende Kanten eindeutig bestimmt ist, wenn wir $\overline{OA} = \alpha$, $\overline{OB} = \beta$, $\overline{OD} = \gamma$ setzen, durch eine gewisse Verknüpfung der Strecken α, β und γ dargestellt werden können.

Fig. 28.



Sei der Spath gegeben durch

$$\alpha \circ \beta \circ \gamma.$$

Das Parallelopiped kann erzeugt gedacht werden durch Translation des Spatheckes OAB_1B um die Strecke $\overline{OD}$, ferner durch Translation des Spatheckes $OBCD$ um die Strecke $\overline{OA}$, wodurch wir die Relation haben

$$\alpha \circ \beta \circ \gamma = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma). \quad (1)$$

Seien $\overline{OA} = \alpha$, $\overline{OB} = \beta$, $\overline{OC} = \gamma$, $\overline{AM} = \delta$ (Fig. 28) solche Strecken, von denen nur α, β und γ in einer Ebene liegen. Durch diese Strecken als Kanten sind die drei Spathe

$OCDABC_1D_1A_1$, $ADNMA_1D_1N_1M_1$ und $OCNMBC_1N_1M_1$ bestimmt und es ist die Summe der beiden ersten Spathe gleich dem dritten Spathe.

Denken wir uns diese drei Spathe durch Translationen des Spatheckes OBC_1C erzeugt, so ist

$$\alpha \circ (\beta \circ \gamma) + \delta \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha + \delta) \circ (\beta \circ \gamma) \tag{2}$$

oder, wenn wir $(\beta \circ \gamma) = \mathfrak{B}$ setzen,

$$\alpha \circ \mathfrak{B} + \delta \circ \mathfrak{B} = (\alpha + \delta) \circ \mathfrak{B}. \tag{2'}$$

Lassen wir dagegen diese drei Spathe durch die Translation der Spathecke $OCDA$, $ADNM$ und $OCNM$ um die Strecke β entstehen, dann ist

$$\begin{aligned} \beta \circ (\gamma \circ \alpha) + \beta \circ (\gamma \circ \delta) &= \beta \circ [\gamma \circ (\alpha + \delta)] \\ &= \beta \circ [(\gamma \circ \alpha) + (\gamma \circ \delta)], \end{aligned} \tag{3}$$

oder, wenn wir $(\gamma \circ \alpha) = \mathfrak{C}_1$, $(\gamma \circ \delta) = \mathfrak{C}_2$ setzen,

$$\beta \circ \mathfrak{C}_1 + \beta \circ \mathfrak{C}_2 = \beta \circ (\mathfrak{C}_1 \circ \mathfrak{C}_2). \tag{3'}$$

Drücken wir die positive Entstehungsweise des Spathes (Fig. 25) durch

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ \beta \circ \gamma$$

aus, so ergiebt sich, wenn wir bedenken, dafs im vorliegenden Falle $(\alpha \circ \beta) = -(\beta \circ \alpha)$ und $(\beta \circ \gamma) = -(\gamma \circ \beta)$ ist,

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \beta \circ \gamma) &= -(\alpha \circ \gamma \circ \beta) = -(\beta \circ \alpha \circ \gamma) = (\beta \circ \gamma \circ \alpha) \\ &= \quad (\gamma \circ \alpha \circ \beta) = -(\gamma \circ \beta \circ \alpha). \end{aligned} \tag{4}$$

Die in Rede stehende Verknüpfung ist nach (1) assoziativ, nach (2) und (3) vollkommen distributiv, nach (4) ändert sie ihr Vorzeichen, wenn irgend zwei Glieder derselben miteinander vertauscht werden, dahingegen tritt kein Zeichenwechsel ein, wenn diese Vertauschung eine zweifache ist.

Fallen die Strecken α, β und γ in eine Ebene hinein, so ist der Körperraum des durch sie bestimmten Spathes gleich Null. Überdies erzeugt dann das Spatheck $(\alpha\beta)$, wenn es um die Strecke γ transliert, eine verschwindende Fläche. Mithin verschwindet das Ergebnis der Verknüpfung, wenn ihre Glieder in eine Ebene hineinfallen.

Demnach ist die fragliche Verknüpfung eine multiplikative, ihr Ergebnis ist als ein äufseres Produkt aufzufassen, weil dasselbe verschwindet, wenn die Faktoren des Produktes in einer Ebene liegen, resp. einer Ebene parallel sind.

Nunmehr schreiben wir, analog der Bezeichnung des äufseren Produktes aus zwei Strecken, das äufsere Produkt aus drei Strecken

$$\alpha\beta\gamma = (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma),$$

ferner ist dann

$$\alpha(\beta\gamma)+\delta(\beta\gamma)=(\alpha+\delta)(\beta\gamma),\quad \beta(\gamma\alpha)+\beta(\gamma\delta)=\beta(\gamma\alpha+\gamma\delta),$$
$$(\alpha\beta\gamma)=-(\alpha\gamma\beta)=-(\beta\alpha\gamma)=(\beta\gamma\alpha)=(\gamma\alpha\beta)=-(\gamma\beta\alpha).$$

Das äufsere Produkt aus drei Strecken ist der Körperraum des durch seine Faktoren bestimmten Spathes, wenn wir den Strecken eine solche Parallellage geben, dafs sie ein gemeinsames Anfangselement besitzen, mit Rücksicht auf den Entstehungssinn des Spathes. Die gegenseitige Vertauschung irgend zweier seiner Faktoren hat einen Zeichenwechsel, eine weitere solche Vertauschung keine Änderung des Vorzeichens des Produktes zur Folge. Fallen die drei Faktoren in eine Ebene, so verschwindet das Produkt.

Es ist zunächst

$$(\alpha+m\gamma)\beta\gamma=\alpha\beta\gamma+m\gamma\beta\gamma,$$

aber $\gamma\beta\gamma$ ist gleich Null, denn die Faktoren dieses Produktes sind einer Ebene parallel, mithin ist

$$(\alpha+m\gamma)\beta\gamma=\alpha\beta\gamma.$$

Fügen wir zu irgend einem Faktor eines äufseren Produktes aus drei Strecken ein beliebiges Vielfache eines anderen Faktors hinzu, so bleibt der Wert dieses Produktes ungeändert.

Wir dürfen, unter m irgend eine reelle Zahl verstanden, setzen

$$m(\alpha\beta\gamma)=m\alpha\beta\gamma=(m\alpha)\beta\gamma=m\beta\gamma\alpha=(m\beta)\gamma\alpha\cdots$$

Multiplikation eines äufseren Produktes aus drei Strecken mit einer reellen Zahl ist Multiplikation irgend eines seiner Faktoren mit dieser Zahl.

Sind ε_1, ε_2 und ε_3 drei nicht einer Ebene parallele Strecken des Raumes, so ist stets

$$\alpha=\sum_{k=1}^{k=3}a_k\varepsilon_k,\quad \beta=\sum_{k=1}^{k=3}b_k\varepsilon_k,\quad \gamma=\sum_{k=1}^{k=3}c_k\varepsilon_k$$

und damit erhalten wir zunächst

$$\alpha\beta\gamma=(\alpha\beta)\gamma=\{(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3)(b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+b_3\varepsilon_3)\}(c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2+c_3\varepsilon_3).$$

Nun giebt die Ausführung der Multiplikation in der Hakenklammer

$$\alpha\beta\gamma=\{(a_1b_2-a_2b_1)\varepsilon_1\varepsilon_2+(a_2b_3-a_3b_2)\varepsilon_2\varepsilon_3$$
$$+(a_3b_1-a_1b_3)\varepsilon_3\varepsilon_1\}(c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2+c_3\varepsilon_3),$$

und wenn wir jetzt die Klammern auf der rechten Seite dieser Gleichung lösen, dabei die Gesetze gehörig beachten, welchen ein äufseres Produkt aus drei Strecken unterliegt, so finden wir

$$\alpha\beta\gamma = \{(a_1 b_2 - a_2 b_1)c_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)c_2\}(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$$

oder

$$\alpha\beta\gamma = \{a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2\}(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3) \quad (5)$$

oder, indem wir den Zahlkoeffizienten des Streckenproduktes $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ mit m bezeichnen,

$$\alpha\beta\gamma = m\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 .$$

Weil alle Strecken des Raumes aus denselben drei nicht komplanaren Strecken ableitbar sind, so ist auch

$$\alpha'\beta'\gamma' = m'\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 .$$

Mithin haben wir die Relation

$$(\alpha\beta\gamma) : (\alpha'\beta'\gamma') = m : m' = p .$$

Das Verhältnis, der Quotient zweier Spathe ist stets eine reelle Zahl. Spathe sind stets gleichartige Gröfsen.

Zwei Spathe sind einander gleich, wenn sie gleiche Ausdehnungen und gleichen Entstehungssinn besitzen.

Ist $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$ die Maafseinheit für Körperräume, dann sind m und m' die Volumenzahlen der Spathe $(\alpha\beta\gamma)$ und $(\alpha'\beta'\gamma')$ resp.

Zwei Spathe sind einander gleich, wenn sie gleiche Volumenzahlen und denselben Entstehungssinn besitzen.

Ist das Produkt $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$ die Maafszahl für Körperräume, dann nennen wir den Koeffizienten m die Determinante des Produktes aus den Strecken α, β und γ und schreiben

$$\alpha\beta\gamma = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3) = \Delta(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3) .$$

Damit die Strecken α, β, γ komplanar sind, mufs mithin die Bedingung erfüllt sein

$$\Delta = 0 .$$

Setzen wir

$$\alpha_1 = a_1 \varepsilon_1 + b_1 \varepsilon_2 + c_1 \varepsilon_3 , \quad \beta_1 = a_2 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + c_2 \varepsilon_3 , \quad \gamma_1 = a_3 \varepsilon_1 + b_3 \varepsilon_2 + c_3 \varepsilon_3 ,$$

so erhalten wir

$$\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 = (a_1 \varepsilon_1 + b_1 \varepsilon_2 + c_1 \varepsilon_3)(a_2 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + c_2 \varepsilon_3)(a_3 \varepsilon_1 + b_3 \varepsilon_2 + c_3 \varepsilon_3),$$

$$\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 = \{a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1\}(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3) . \quad (6)$$

Die Vergleichung von (5) und (6) zeigt, dafs dann

$$\alpha\beta\gamma = \alpha_1 \beta_1 \gamma_1$$

ist, und weil wir schreiben können

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3),$$

so folgt, dafs stets

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

ist.

§ 4. Anwendung des äufseren Produktes aus drei Strecken.

1) Seien $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha\beta\gamma_1$ zwei Spathe mit den gleichen Seitenflächen $(\alpha\beta)$, und sei

$$\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma_1.$$

Weil γ_1 aus α, β und γ numerisch abgeleitet werden kann, so dürfen wir setzen

$$\gamma_1 = m\alpha + n\beta + p\gamma,$$

womit wir erhalten

$$(\alpha\beta)\gamma = (\alpha\beta)(m\alpha + n\beta + p\gamma) = (\alpha\beta)p\gamma,$$

mithin mufs $p = 1$, also

$$\gamma_1 = m\alpha + n\beta + \gamma, \quad (\alpha\beta)\gamma_1 = (\alpha\beta)(m\alpha + n\beta + \gamma)$$

sein, d. h. es müssen, wenn die Spathecke $(\alpha\beta)$ der beiden Spathe in derselben Ebene liegen, die Endelemente von γ und γ_1 in einer zu dieser Ebene parallelen Ebene, mithin die diesen Spathecken gegenüber liegenden, ihnen kongruenten Seitenflächen auch in dieser Ebene liegen, woraus der Satz hervorgeht:

„Spathe zwischen zwei parallelen Ebenen, deren mit diesen Ebenen zusammenfallenden Flächen einander gleich sind, haben gleiche Körperräume.“

2) Sind α, β und γ drei in einer Ecke zusammenstofsende Kanten einer Pyramide mit dreieckiger oder spatheckförmiger Grundfläche, so können wir deren Körperraum Ω darstellen durch

$$\Omega = u(\alpha\beta\gamma),$$

unter u eine gewisse reelle Zahl verstanden. Für eine zweite Pyramide mit derselben Grundfläche haben wir entsprechend

$$\Omega_1 = v(\alpha\beta\gamma_1).$$

Mit $\Omega_1 = \Omega$ erhalten wir, da $\gamma_1 = m\alpha + n\beta + p\gamma$ gesetzt werden kann, die Bedingung

$$(\alpha\beta)u\gamma = (\alpha\beta)v(m\alpha + n\beta + p\gamma) = (\alpha\beta)pv\gamma,$$

mithin mufs dann

$$u = pv, \quad \text{d. i.} \quad v = \frac{u}{p}$$

sein, wodurch sich ergiebt

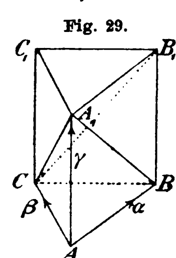
$$(\alpha\beta)\gamma = (\alpha\beta)\left(\frac{m}{p}\alpha + \frac{n}{p}\beta + \gamma\right) = (\alpha\beta)\gamma_1.$$

Daher müssen, wenn die Grundflächen $(\alpha\beta)$ beider Pyramiden in einer Ebene liegen, ihre Spitzen, die Endelemente von γ und γ_1 in einer zu dieser Ebene parallelen Ebene sich befinden. Das gilt offenbar auch, wenn die Grundflächen beliebige Polygonalflächen sind, wodurch wir sagen dürfen:

„Zwei Pyramiden mit gleichen Grundflächen in derselben Ebene haben gleiche Körperräume, wenn ihre Spitzen in einer zu dieser Ebene parallelen Ebene liegen."

3) Sei $ABCA_1B_1C_1$ (Fig. 29) ein dreiseitiges Prisma mit den parallelen Grundflächen ABC und $A_1B_1C_1$. Legen wir durch die Punkte B, C, A_1 und C, A_1, B_1 je eine Ebene, dann zerfällt das Prisma durch dieselben in die drei Pyramiden $ABCA_1$, $A_1B_1C_1C$ und BB_1A_1C, welche gleiche Körperräume besitzen. Denn die beiden ersten Pyramiden liegen zwischen parallelen Ebenen und ihre Seitenflächen ABC und $A_1B_1C_1$ sind kongruent, ferner haben die erste und die dritte Pyramide in C eine gemeinsame Spitze, ihre derselben gegenüberliegenden Seitenflächen sind die kongruenten Dreiecke ABA_1 und BB_1A_1 in einer Ebene. Ist nun $(B - A) = \alpha$, $(C - A) = \beta$, $(A_1 - A) = \gamma$, so ist der Rauminhalt einer jeden Pyramide gleich $n(\alpha\beta\gamma)$, derjenige des Prismas $\frac{1}{2}(\alpha\beta\gamma)$, daher ist

Fig. 29.



$$3n(\alpha\beta\gamma) = \frac{1}{2}(\alpha\beta\gamma),$$

also

$$n = \frac{1}{6}.$$

Bezeichnet nun Ω den Körperraum der dreiseitigen Pyramide $ABCA_1$, so ist

$$\Omega = \frac{1}{6}(\alpha\beta\gamma).$$

4) Sind α, β, γ und δ die Träger von vier Eckpunkten eines Parallelopipedes, die nicht in einer Ebene liegen, so ist dessen Körperraum

$$\Omega = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\delta - \alpha)$$

und wenn wir die Multiplikation auf der rechten Seite dieser Gleichung durchführen, so erhalten wir

$$\Omega = \beta\gamma\delta + \delta\gamma\alpha + \alpha\beta\delta + \beta\alpha\gamma.$$

§ 5. Das äufsere Produkt aus vier und mehr Strecken.

Der äufseren Produktbildung entsprechend, entsteht das äufsere Produkt aus vier Strecken durch die Translation des Spathes aus den drei ersten Faktoren um den vierten Faktor.

Zunächst ist

$$\alpha\beta\gamma\alpha = (\alpha\beta\gamma)\alpha.$$

Lassen wir den Spath $(\alpha\beta\gamma)$ die Translation α ausführen, so beschreibt seine Seitenfläche $(\alpha\beta)$ eine verschwindende Fläche, der Spath mithin ein Gebilde, dessen Körperraum gleich Null ist, folglich ist

$$\alpha\beta\gamma\alpha = 0.$$

Nun erhalten wir für das äufsere Produkt aus den vier voneinander verschiedenen Strecken α, β, γ und δ des Raumes, da $\delta = m\alpha + n\beta + p\gamma$ gesetzt werden darf,

$$\alpha\beta\gamma\delta = (\alpha\beta\gamma)(m\alpha + n\beta + p\gamma),$$
$$\alpha\beta\gamma\delta = m(\alpha\beta\gamma)\alpha + n(\alpha\beta\gamma)\beta + p(\alpha\beta\gamma)\gamma,$$

und weil die sämtlichen Produkte auf der rechten Seite dieser Gleichung verschwinden, so ist

$$\alpha\beta\gamma\delta = 0.$$

Das äufsere Produkt aus vier und mehr Strecken des Raumes ist stets gleich Null.

Zweiter Abschnitt.

Die äufsere Multiplikation von Punkten.

§ 6. Das äufsere Produkt aus zwei Punkten.

Das dem äufseren Produkte aus zwei Strecken entsprechende Produkt aus zwei Punkten A und B mufs dieselben Eigenschaften wie das erstere haben, folglich mufs sein

$$A \circ B + B \circ A = 0, \quad A \circ B + A \circ C = A \circ (B + C)$$

und aus diesen Bedingungen folgt

$$A \circ A = 0, \quad B \circ A + C \circ A = (B + C) \circ A,$$

so dafs das Ergebnis der Verknüpfung verschwindet, wenn ihre Glieder zusammenfallen und die Verknüpfung vollkommen distributiv ist.

Nun ist bei dieser Multiplikation, indem wir von jetzt an das Verknüpfungszeichen weglassen,

$$AB - AA = A(B - A),$$

und weil $AA = 0$ ist, gelangen wir zu

$$AB = A(B - A).$$

Das äufsere Produkt aus zwei Punkten ist gleich dem äufseren Produkte aus seinem ersten Faktor und der durch die beiden Faktoren bestimmten Strecke mit dem Entstehungssinn vom ersten nach dem zweiten Faktor, es fällt mit dieser Strecke zusammen und heifst zur Unterscheidung von einer Strecke ein Linienteil. Dasselbe kann aufgefafst werden als eine Verknüpfung des Punktfaktors mit allen Punkten des Streckenfaktors.

Aus der Gleichung

$$AB + AC = A(B + C)$$

folgt, indem gesetzt werden darf

$$B + C = 2E = A + D,$$
$$AB + AC = A(A + D) = AD,$$

oder

$$A(B - A) + A(C - A) = A(D - A),$$

wodurch wir erhalten

$$A\{(B - A) + (C - A)\} = A(D - A),$$
$$(B - A) + (C - A) \ = (D - A).$$

Die Summe aus zwei, in einem Punkte entspringenden Linienteilen ist ein dritter Linienteil mit demselben Anfangselemente und einer Strecke, welche gleich der Summe der Strecken der Addenden ist.

Sind die Linienteile CD und AB einander gleich, dann müssen die Gleichungen

$$CD = AB, \quad C(D - C) = A(B - A)$$

bestehen. Weil diese Produkte gleiche Strecken oder Ausweichungen besitzen müssen, so ist erforderlich, dafs

$$D - C = B - A, \quad \text{oder} \quad D = B - A + C$$

ist, dafs der Punkt D in der Ebene der Punkte A, B und C liegt.

Die Multiplikation der letzten Gleichung mit C giebt

$$CD = CB - CA = C(B - A),$$

und wir dürfen setzen

$$C = mA + nB + pD, \quad m + n + p = 1,$$

wo m, n und p näher zu bestimmende Koeffizienten sind. Dadurch erhalten wir

$$CD = (mA + nB + pD)(B - A),$$
$$CD = (m + n)AB + p(DB - DA) = AB,$$

woraus hervorgeht, dafs

$$m + n = 1, \quad p = 0,$$

also

$$C = mA + nB, \quad m + n = 1$$

sein mufs. Daher mufs der Punkt C mit irgend einem Punkte der durch A und B bestimmten geraden Linie zusammenfallen und dann koinzidiert auch der Punkt D mit dieser Linie.

Zwei Linienteile sind dann und nur dann einander gleich, wenn sie auf ein und derselben geraden Linie liegen und ihnen gleiche Strecken zukommen. Jeder Linienteil läfst sich auf seinem Träger ohne Wertänderung beliebig verschieben.

Für äufsere Produkte aus zwei Punktgröfsen haben wir

$$(mA)B \quad = (A_{(1)} + A_{(2)} + \cdots + A_{(m)})\, B$$
$$= (AB)_{(1)} + (AB)_{(2)} + \cdots + (AB)_{(m)},$$
$$(mA)B \quad = m(AB).$$
$$(mA)(nB) = (A_{(1)} + A_{(2)} + \cdots + A_{(m)})(B_{(1)} + B_{(2)} + \cdots + B_{(n)})$$
$$= (AB)_{(1)} + (AB)_{(2)} + \cdots + (AB)_{(mn)},$$
$$(mA)(nB) = mn(AB).$$

Das äufsere Produkt aus zwei Punktgröfsen ist äquivalent dem mit dem Produkte ihrer Koeffizienten vervielfachten äufseren Produkte aus ihren Grundpunkten, einem vielfachen Linienteile ihrer Grundpunkte.

Seien die beiden Punktgröfsen $\dot{A}$ und $\dot{B}$ aus den Punkten E_1 und E_2 numerisch abgeleitete Gröfsen ersten Grades in der Geraden der Punkte E_1 und E_2, nämlich

$$\dot{A} = a_1 E_1 + a_2 E_2, \quad \dot{B} = b_1 E_1 + b_2 E_2.$$

Das Produkt dieser Gröfsen ist

$$\dot{A}\dot{B} = (a_1 E_1 + a_2 E_2)(b_1 E_1 + b_2 E_2).$$

Führen wir die Multiplikation auf der rechten Seite dieser Gleichung durch, beachten, dafs $E_1 E_1 = 0$, $E_2 E_2 = 0$, $E_2 E_1 = - E_1 E_2$ ist, so ergiebt sich

$$\dot{A}\dot{B} = (a_1 b_2 - a_2 b_1) E_1 E_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} E_1 E_2 = m E_1 E_2,$$

womit dieses äufsere Produkt als ein vielfacher Linienteil des durch die Fundamentalpunkte bestimmten Linienteiles erscheint.

Ist $\dot{A}$ eine Punktgröfse mit geltendem Gewichte, $\dot{B}$ eine solche vom Gewichte Null, dann ist $b_1 + b_2 = 0$, und wir haben

$$\dot{A}\overline{B} = (a_1 + a_2) b_1 E_2 E_1 = (a_1 + a_2) b_2 E_2 E_1 .$$

Mit $a_1 + a_2 = 0$, $b_1 + b_2 = 0$ sind $\dot{A}$ und $\dot{B}$ unendlich ferne Punktgröfsen, resp. Strecken, es ergiebt sich

$$(0A)(0B) = \overline{A}\overline{B} = 0 .$$

Hieraus schliefsen wir, weil das äufsere Produkt aus zwei zusammenfallenden Punkten verschwindet, dafs die unendlich fernen Punkte einer geraden Linie zusammenfallen, was zu dem Satze führt:

Jede gerade Linie hat nur einen unendlich fernen Punkt.

Haben wir

$$\dot{A}\dot{B} = mE_1E_2 , \quad \dot{C}\dot{D} = nE_1E_2 ,$$

so ist

$$(\dot{A}\dot{B}) : (\dot{C}\dot{D}) = m : n = p .$$

Der Quotient aus zwei Linienteilen in derselben geraden Linie ist stets eine reelle Zahl.

§ 7. Das äufsere Produkt aus drei (unabhängigen) Punkten.

Das äufsere Produkt aus drei Punkten haben wir seinem Werte nach dadurch zu bestimmen, dafs wir den Wert des Produktes aus seinen beiden ersten Faktoren mit dem dritten Faktor, oder den ersten Faktor mit dem äufseren Produkte aus dem zweiten und dritten Faktor multiplizieren, denn wir müssen, entsprechend der Eigenschaft des äufseren Produktes aus drei Strecken, haben

$$ABC = (AB)C = A(BC) .$$

Hierdurch erhalten wir

$$ABC = (AB)C = [A(B - A)]C = A[(B - A)C] = A(BC - AC)$$
$$= A[B(C - B) - A(C - A)] = AB(C - B) ,$$
$$ABC = A(B - A)(C - B) ,$$

ferner ist

$$ABC = A(BC) = A[B(C - B)] = AB(C - B) ,$$
$$ABC = A(B - A)(C - B) .$$

Durch dieses Ergebnis erhalten wir ferner

$$ABC = A(B - A)[(C - A) + (A - B)] ,$$
$$ABC = A(B - A)(C - A) .$$

Weil $AB = -BA$ ist, so gelten noch die Gleichungen

$$ABC = -ACB = -BAC = BCA = CAB = -CBA.$$

Fallen die Faktoren des Produktes in eine gerade Linie, dann läfst sich jeder Faktor aus den beiden anderen numerisch ableiten. Ist $C = mA + nB$, so haben wir

$$ABC = A(B - A)[mA + (1 - m)B], \quad (m + n = 1),$$
$$ABC = A(B - A)m(A - B) = 0.$$

Fällt der Faktor C in die durch A und B bestimmte gerade Linie, dann werden die Strecken $(B - A)$ und $(C - A)$ gleichartig, ihr äufseres Produkt und somit auch dasjenige der drei Punkte verschwindet.

Das äufsere Produkt aus drei Punkten ist gleich dem Produkte aus dem ersten Faktor und einem der durch diese Punkte bestimmten flächengleichen Spathecke mit dem der Faktorenfolge entsprechenden Entstehungssinn. Dasselbe ändert sein Vorzeichen, wenn irgend zwei seiner Faktoren miteinander vertauscht werden, bei doppelter Vertauschung der Faktoren findet kein Zeichenwechsel statt. Der Wert des Produktes verschwindet, wenn seine Faktoren in einer geraden Linie liegen, wenn sie voneinander abhängige Punkte sind.

Zur Unterscheidung von dem äufseren Produkte aus zwei Strecken nennen wir dasjenige aus drei Punkten einen Flächenteil, das ihm zugehörende Spatheck, welches seine Ausdehnung angiebt, seine Ausweichung.

Sind A, B zwei fixe Punkte und ist U ein variabler Punkt der durch A und B bestimmten geraden Linie, so ist, weil das äufsere Produkt aus diesen drei Punkten stets verschwindet,

$$ABU = 0$$

eine Gleichung der durch die Punkte A und B bestimmten geraden Linie und zwar die einfachste Gleichung.

Sind ABC und DEF zwei einander gleiche Flächenteile, dann müssen, weil diese Produkte gleiche Ausweichungen besitzen müssen, die Gleichungen bestehen

$$ABC = DEF, \quad A(B - A)(C - A) = D(E - D)(F - D),$$
$$(B - A)(C - A) = (E - D)(F - D),$$

oder, mit $(B - A)(C - A) = \alpha\beta$, $(E - D)(F - D) = \gamma\delta$,

$$A\alpha\beta = D\gamma\delta, \quad \alpha\beta = \gamma\delta.$$

Die letzte Gleichung bedingt, dafs die beiden Flächenteile in parallelen Ebenen zu liegen haben.

Sind α, β und ε drei nicht komplanare Strecken, dann wird sein

$$D = A + m\alpha + n\beta + p\varepsilon,$$

womit wir erhalten

$$\begin{aligned} DEF = D\alpha\beta &= (A + m\alpha + n\beta + p\varepsilon)\alpha\beta \\ &= A\alpha\beta + p\varepsilon\alpha\beta. \end{aligned}$$

Damit demnach die obige Gleichung existieren kann, mufs $p = 0$, d. h.

$$D = A + m\alpha + n\beta$$

sein, der Punkt D in der Ebene des Spatheckes $(\alpha\beta)$ liegen, und sodann mufs auch das Spatheck $(\gamma\delta)$ in dieser Ebene sich befinden.

Zwei Flächenteile sind dann und nur dann einander gleich, wenn sie in derselben Ebene liegen und ihre Spathecke gleiche Ausdehnungen und den nämlichen Entstehungssinn aufweisen. Ein Flächenteil ändert seinen Wert nicht, wenn wir ihn beliebig in seiner Ebene verschieben oder um einen seiner Eckpunkte in dieser Ebene beliebig drehen.

Für die Multiplikation eines äufseren Produktes aus drei Punkten mit einer reellen Zahl erhalten wir

$$\begin{aligned} m(ABC) &= mA(BC) = (mAB)C = AmBC = A(mBC) = ABmC \\ &= m\{A(B-A)(C-A)\} = mA(B-A)(C-A) \\ &= Am[(B-A)(C-A)]. \end{aligned}$$

Sind $\dot{A} = mA$, $\dot{B} = nB$, $\dot{C} = pC$ drei Punktgröfsen, so ergiebt sich für ihr äufseres Produkt

$$\begin{aligned} \dot{A}\dot{B}\dot{C} &= mAnBpC = m(AnB)pC = mn(AB)pC = mn(ABpC) \\ &= mnpABC. \end{aligned}$$

Das äufsere Produkt aus drei Punktgröfsen ist ein Flächenteil, gleich dem mit dem Produkte der Gewichte der Punktgröfsen vervielfachten Flächenteile, welcher gleich dem äufseren Produkte aus den Grundpunkten in derselben Reihenfolge der Punktgröfsen ist.

Mit $\dot{B}_1 = \dot{B} + c\dot{C}$ erhalten wir

$$\dot{A}\dot{B}_1\dot{C} = \dot{A}(\dot{B} + c\dot{C})\dot{C} = \dot{A}\dot{B}\dot{C}.$$

Tritt zu irgend einem Faktor eines äufseren Produktes aus drei Gröfsen ersten Grades in der Ebene ein beliebiges Vielfache eines der anderen Faktoren hinzu, so ändert das Produkt seinen Wert nicht.

Sind die drei Gröfsen ersten Grades $\dot{A}$, $\dot{B}$ und $\dot{C}$ aus den Fundamentalpunkten E_1, E_2 und E_3 einer Ebene abgeleitet, ist

$$\dot{A} = \sum_{k=1}^{k=3} a_k E_k, \quad \dot{B} = \sum_{k=1}^{k=3} b_k E_k, \quad \dot{C} = \sum_{k=1}^{k=3} c_k E_k,$$

dann ergiebt sich für ihr äufseres Produkt

$$\dot{A}\dot{B}\dot{C} = \sum_{k=1}^{k=3} a_k E_k \sum_{k=1}^{k=3} b_k E_k \sum_{k=1}^{k=3} c_k E_k$$

$$\dot{A}\dot{B}\dot{C} = \{(a_1 b_2 - a_2 b_1)c_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)c_2\}(E_1 E_2 E_3)$$

oder

$$\dot{A}\dot{B}\dot{C} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} (E_1 E_2 E_3) = \Delta(E_1 E_2 E_3),$$

zu welchem Resultate wir in derselben Weise gelangen, wie zu dem Werte des äufseren Produktes aus drei Strecken, wenn sie aus den nicht komplanaren Strecken ε_1, ε_2 und ε_3 numerisch abgeleitet gegeben sind.

Das äufsere Produkt aus drei Gröfsen ersten Grades in der Ebene ist ein Vielfaches des Flächenteiles der Fundamentalpunkte, aus denen sie numerisch abgeleitet sind, eine Gröfse dritten Grades.

Diese drei Gröfsen liegen in einer geraden Linie, wenn die Bedingung erfüllt ist

$$\Delta = 0.$$

Sind insbesondere die drei Gröfsen ersten Grades solche mit verschwindenden Gewichten, äquivalent Strecken, dann sind die Koeffizientensummen in ihren Gleichungen gleich Null und es ergiebt sich

$$(0A)(0B)(0C) = \overline{A}\overline{B}\overline{C} = 0.$$

Das äufsere Produkt aus drei komplanaren Strecken verschwindet.

Beachten wir, dafs die Grundpunkte von Gröfsen ersten Grades mit verschwindenden Gewichten unendlich fern liegen und die letzte Relation, dann resultiert:

Die unendlich fernen Punkte einer Ebene liegen in einer geraden Linie, und jede Ebene besitzt nur eine unendlich ferne Gerade.

Aus den Gleichungen

$$\dot{A}\dot{B}\dot{C} = m(E_1 E_2 E_3), \quad \dot{D}\dot{E}\dot{F} = n(E_1 E_2 E_3)$$

folgt

$$(\dot{A}\dot{B}\dot{C}) : (\dot{D}\dot{E}\dot{F}) = m : n = p.$$

Der Quotient aus zwei Flächenteilen in einer Ebene ist eine reelle Zahl.

§ 8. Anwendung des äufseren Produktes aus drei Punkten.

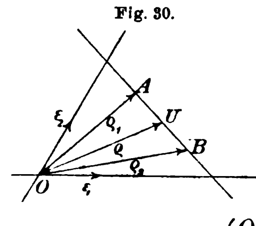
1) Die durch die Punkte A und B gehende gerade Linie ist durch die Gleichung

$$ABU = 0 \tag{1}$$

gegeben. Von dieser Gleichung ausgehend soll die Gleichung der Linie in ebenen Parallelkoordinaten aufgesucht werden.

Es sei O Koordinatenursprung, $A = O + \varrho_1$, $B = O + \varrho_2$, $U = O + \varrho$, ferner seien ε_1 und ε_2 die Einheitsstrecken des Richtsystems, dessen Axen die gerade Linie schneiden (Fig. 30), so dafs $\varrho_k = x_k\varepsilon_1 + y_k\varepsilon_2$, $k = 1, 2$, $\varrho = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2$ ist.

Fig. 30.



Substituieren wir die Werte von A und B in (1), dann wird

$$(O + \varrho_1)(O + \varrho_2)(O + \varrho) = 0,$$
$$(\varrho_1 O + O\varrho_2 + \varrho_1\varrho_2)(O + \varrho) = 0,$$
$$\varrho_1\varrho_2 O + \varrho_1 O\varrho + O\varrho_2\varrho = 0,$$

denn das Produkt $\varrho_1\varrho_2\varrho$ verschwindet wegen der Komplanarität seiner Faktoren. Weil die Faktoren der in der letzten Gleichung vorkommenden Produkte Gröfsen ersten Grades sind, so ist auch

$$\varrho_1\varrho_2 O - \varrho_1\varrho O + \varrho_2\varrho O = 0$$

oder

$$(\varrho_1\varrho_2 - \varrho_1\varrho + \varrho_2\varrho)O = 0.$$

Hieraus folgt, weil der Punkt O nicht verschwinden kann,

$$\varrho_1\varrho_2 + (\varrho_2 - \varrho_1)\varrho = 0.$$

Nun giebt die Substitution der obigen Werte dieser Strecken in die vorstehende Gleichung

$$(x_1\varepsilon_1 + y_1\varepsilon_2)(x_2\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2) + [(x_2 - x_1)\varepsilon_1 + (y_2 - y_1)\varepsilon_2](x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2) = 0,$$

aus welcher Gleichung durch Ausführung der Multiplikation und mit $\varepsilon_2\varepsilon_1 = -\varepsilon_1\varepsilon_2$ folgt

$$\{x_1y_2 - x_2y_1 - (y_2 - y_1)x + (x_2 - x_1)y\}\varepsilon_1\varepsilon_2 = 0,$$

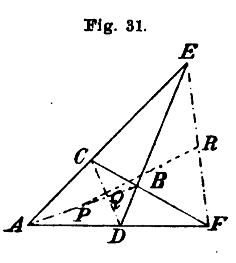
und weil das Produkt $\varepsilon_1\varepsilon_2$ nicht verschwinden kann, so resultiert hieraus

$$x_1y_2 - x_2y_1 - (y_2 - y_1)x + (x_2 - x_1)y = 0,$$

als gewöhnliche Koordinatengleichung der durch die Punkte $A(x_1, y_1)$ und $B(x_2, y_2)$ gehenden geraden Linie.

2) „Die Mittelpunkte der Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen in einer geraden Linie."

Fig. 31.



Sind A, B, C, D, E, F die Ecken eines Vierseits, P, Q und R die Mittelpunkte seiner Diagonalen AB, CD und EF (Fig. 31), dann ist

$$2P = A + B, \quad 2Q = C + D,$$
$$2R = E + F,$$

die Multiplikation der gleichen Seiten dieser drei Gleichungen miteinander giebt

$$8PQR = (A + B)(C + D)(E + F),$$
$$8PQR = ACE + BCE + ADE + BDE + ACF$$
$$+ BCF + ADF + BDF,$$

aber es ist $ACE = BDE = BCF = ADF = 0$, denn die Faktoren eines jeden dieser Produkte liegen in einer geraden Linie, folglich haben wir

$$8PQR = BCE + BDF + (ADE - AFC),$$

nun ist $(ADE - AFC) = -(BCE + BDF)$, daher

$$8PQR = BCE + BDF - (BCE + BDF);$$
$$8PQR = 0, \quad \text{d. h.} \quad PQR = 0.$$

Mithin befinden sich die Punkte P, Q und R in einer geraden Linie, w. z. b. w.

3) Ist U irgend ein Punkt in der Ebene der unabhängigen Punkte E_1, E_2 und E_3, dann ist

$$uU = u_1E_1 + u_2E_2 + u_3E_3, \quad u = u_1 + u_2 + u_3.$$

Die Multiplikation der Seiten dieser Gleichung nacheinander mit E_2E_3, E_3E_1 und E_1E_2 führt zu

$$\left.\begin{array}{c} uE_2E_3U = u_1E_1E_2E_3, \quad uE_3E_1U = u_2E_1E_2E_3, \\ uE_1E_2U = u_3E_1E_2E_3, \end{array}\right\} \quad (1)$$

mithin besteht für die Ableitungszahlen des Punktes U die Proportion

$$u_1 : u_2 : u_3 = E_2E_3U : E_3E_1U : E_1E_2U,$$

daher ist die Lage des Punktes U gegen das Fundamentaldreieck nur von den Verhältnissen der Koeffizienten der Fundamentalpunkte zu einander abhängig.

Aus den Gleichungen (1) leiten wir durch deren Addition ab

$$E_2E_3U + E_3E_1U + E_1E_2U = E_1E_2E_3.$$

„Die Summe der Dreiecksflächen aus den Fundamentallinienteilen und einem beliebigen Punkte der Ebene ist stets der Fläche des Fundamentaldreiecks gleich.“

Wählen wir die Fundamentallinien $E_1 E_2$ und $E_1 E_3$ zu Axen eines Richtsystemes, beachten, dafs

$$u E_1 U = u_2 E_1 E_2 + u_3 E_1 E_3,$$

also

$$u E_1 (U - E_1) = u_2 E_1 (E_2 - E_1) + u_3 E_1 (E_3 - E_1),$$

mithin

$$u(U - E_1) = u_2 (E_2 - E_1) + u_3 (E_3 - E_1)$$

ist, setzen

$$(U - E_1) = \varrho = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2, \quad (E_2 - E_1) = m\varepsilon_1, \quad (E_3 - E_1) = n\varepsilon_2,$$

wobei, wie immer, ε_1 und ε_2 Streckeneinheiten bedeuten, dann ergiebt sich

$$u\varrho = u_2 m \varepsilon_1 + u_3 n \varepsilon_2,$$

$$\varrho = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 = \frac{u_2 m}{u}\varepsilon_1 + \frac{u_3 n}{u}\varepsilon_2,$$

daher sind die Parallelkoordinaten des Punktes u

$$x = \frac{u_2 m}{u}, \quad y = \frac{u_3 n}{u}, \quad u = u_1 + u_2 + u_3.$$

§ 9. Das äufsere Produkt aus vier Punkten.

Das äufsere Produkt aus vier, voneinander unabhängigen Punkten entsteht aus demjenigen dreier Punkte und einem weiteren Punkte auf dieselbe Weise, wie das äufsere Produkt aus drei Punkten aus demjenigen aus zwei Punkten und einem dritten Punkte abgeleitet worden ist. Daher haben wir unmittelbar

$$\begin{aligned} ABCD &= A(B - A)(C - A)(D - A) \\ &= A(B - A)(C - B)(D - C), \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

Aber $(B - A)$ $(C - A)$ $(D - A)$ ist äquivalent dem durch diese Strecken bestimmten Spathe, so dafs das Punktprodukt räumlich mit ihm zusammenfällt, und die Multiplikation des ersten Punktfaktors mit diesem Spathe giebt das äufsere Produkt der vier Punkte. Der Spath verschwindet, wenn die Streckenfaktoren des Produktes in einer Ebene liegen, dann verschwindet auch das Punktprodukt, dessen Faktoren in dieser Ebene gelegen sind. Wir nennen das äufsere Produkt aus vier Punkten Körperteil. Weil $AB = -BA$ ist, so wechselt dieses

Produkt sein Zeichen, wenn wir irgend zwei seiner Faktoren miteinander vertauschen, eine zweifache solche Vertauschung ruft keinen Zeichenwechsel hervor.

Das äufsere Produkt aus vier Punkten ist der durch diese Punkte bestimmte Körperteil, es ändert sein Vorzeichen, wenn irgend zwei seiner Faktoren miteinander vertauscht werden. Das äufsere Produkt aus vier Punkten in einer Ebene, oder aus vier in einer Zahlbeziehung stehenden Punkten verschwindet.

Aus diesem Satze resultiert unmittelbar, dafs, wenn A, B, C feste Punkte bedeuten und U ein variabler Punkt ist,

$$ABCU = 0$$

eine Gleichung der durch die Punkte A, B und C bestimmten Ebene ist, und zwar ist sie die einfachste Gleichung.

Seien $ABCD$ und $EFGH$ zwei äufsere Produkte aus je vier unabhängigen Punkten. Sollen dieselben einander gleich sein, so müssen sie gleiche Ausweichungen, gleiche Spathe besitzen, es müssen die Gleichungen Gültigkeit haben

$$ABCD = EFGH,$$
$$A(B-A)(C-A)(D-A) = E(F-E)(G-E)(H-E),$$
$$(B-A)(C-A)(D-A) = (F-E)(G-E)(H-E),$$

oder, wenn wir setzen

$$(B-A) = \beta, \quad (C-A) = \gamma, \quad (D-A) = \delta, \quad (F-E) = \zeta,$$
$$(G-E) = \eta, \quad (H-E) = \vartheta,$$
$$A\beta\gamma\delta = E\zeta\eta\vartheta, \quad \zeta\eta\vartheta = \beta\gamma\delta,$$

also mufs sein

$$EFGH = E\beta\gamma\delta.$$

Aber der Punkt E läfst sich aus A, β, γ und δ numerisch ableiten, setzen wir

$$E = A + m\beta + n\gamma + p\delta,$$

dann wird

$$EFGH = (A + m\beta + n\gamma + p\delta)\beta\gamma\delta = A\beta\gamma\delta$$
$$EFGH = A(A+\beta)(A+\gamma)(A+\delta) = ABCD.$$

Zwei äufsere Produkte aus je vier von einander unabhängigen Punkten sind stets einander gleich, wenn die durch die Punkte bestimmten Spathe gleiche Körperräume mit dem nämlichen Entstehungssinne besitzen. Alle Körperräume sind gleichartige Gröfsen.

Bezüglich der Multiplikation eines äufseren Produktes aus vier Punkten mit einer reellen Zahl haben wir

$$m(ABCD) = mA(BCD) = (mAB)CD = AmB(CD), \dots$$
$$= mA(B-A)(C-A)(D-A) = A[m(B-A)]C-A)(D-A) \dots$$

Für das äufsere Produkt aus den vier Gröfsen ersten Grades des Raumes $\dot{A} = mA$, $\dot{B} = nB$, $\dot{C} = pC$, $\dot{D} = qD$ erhalten wir

$$\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D} = (mAnBpC)qD = mnpABCqD = - mnpqDABC$$
$$= mnpqABCD.$$

Das äufsere Produkt aus vier Punktgröfsen ist ein Körperteil, gleich dem mit dem Produkte aus den Koeffizienten der Punktgröfsen vervielfachten Körperteile, welcher durch die Grundpunkte der Punktgröfsen bestimmt ist, im Sinne der Folge der Faktoren des Punktproduktes.

Mit $\dot{B}_1 = \dot{B} + c\dot{C}$ bekommen wir

$$\dot{A}\dot{B}_1\dot{C}\dot{D} = \dot{A}(B + c\dot{C})\dot{C}\dot{D} = \dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}.$$

Tritt zu irgend einem Faktor eines äufseren Produktes aus vier Punktgröfsen des Raumes ein beliebiges Vielfache eines der anderen Faktoren hinzu, so ändert das Produkt seinen Wert nicht.

Sind die vier Gröfsen $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$, $\dot{D}$ aus den Fundamentalpunkten E_1, E_2, E_3 und E_4 des Raumes numerisch abgeleitet, so ist

$$\dot{A} = \sum_{k=1}^{k=4} a_k E_k, \quad \dot{B} = \sum_{k=1}^{k=4} b_k E_k, \quad \dot{C} = \sum_{k=1}^{k=4} c_k E_k, \quad \dot{D} = \sum_{k=1}^{k=4} d_k E_k,$$

$$\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D} = \left\{\left(\sum_{k=1}^{k=4} a_k E_k \sum_{k=1}^{k=4} b_k E_k\right) \sum_{k=1}^{k=4} c_k E_k\right\} \sum_{k=1}^{k=4} d_k E_k, \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D} = \{ & [(a_2 b_3 - a_3 b_2)c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)c_3] d_4 \\ - & [(a_2 b_4 - a_4 b_2)c_1 + (a_4 b_1 - a_1 b_4)c_2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)c_4] d_3 \\ + & [(a_3 b_4 - a_4 b_3)c_1 + (a_4 b_1 - a_1 b_4)c_3 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)c_4] d_2 \\ - & [(a_3 b_4 - a_4 b_3)c_2 + (a_4 b_2 - a_2 b_4)c_3 \\ & + (a_2 b_3 - a_3 b_2)c_4] d_1 \} (E_1 E_2 E_3 E_4),\end{aligned}$$

oder

$$\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} (E_1 E_2 E_3 E_4) = \Delta(E_1 E_2 E_3 E_4),$$

zu welchem Resultate wir gelangen, wenn wir die Multiplikation in der Weise durchführen, wie solches die Klammern in der Gleichung (1) andeuten.

Das äufsere Produkt aus vier Gröfsen ersten Grades im Raume ist ein Vielfaches des Körperteiles der Fundamentalpunkte des Raumes, aus denen sie numerisch abgeleitet sind, eine Gröfse vierten Grades.

Diese vier Gröfsen befinden sich in einer Ebene, wenn die Bedingung erfüllt ist,

$$\Delta = 0.$$

Sind insbesondere die vier Gröfsen ersten Grades solche mit verschwindenden Gewichten, äquivalent Strecken, dann ist $\sum_{k=1}^{k=4} a_k = 0$ etc., und es ergiebt sich

$$(0A)(0B)(0C)(0D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} = 0.$$

Das äufsere Produkt aus vier Strecken des Raumes verschwindet.

Beachten wir, dafs die Grundpunkte von Gröfsen ersten Grades unendlich fern liegen, wenn ihre Gewichte verschwinden, denken wir uns in der letzten Relation den Punkt $(0D)$ variabel, dann resultiert:

Der Ort der unendlich fernen Punkte des Raumes ist eine Ebene. Der Raum besitzt eine und nur eine unendlich ferne Ebene.

Aus den Gleichungen

$$\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D} = m(E_1E_2E_3E_4), \quad \dot{E}\dot{F}\dot{G}\dot{H} = n(E_1E_2E_3E_4)$$

folgt

$$(\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}) : (\dot{E}\dot{F}\dot{G}\dot{H}) = m : n = p.$$

Der Quotient aus zwei Körperteilen ist stets eine reelle Zahl.

§ 10. Anwendung des äufseren Produktes aus vier Punkten.

1) Die Punktproduktgleichung der durch die Punkte A, B und C gehenden Ebene, wenn U der sie beschreibende Punkt ist, lautet

$$ABCU = 0. \tag{1}$$

Sei O ein beliebiger Punkt des Raumes, welcher nicht in der Ebene liegt, $A = O + \varrho_1$, $B = O + \varrho_2$, $C = O + \varrho_3$, $U = O + \varrho$. — Mit diesen Werten geht die (1) über in

$$(O + \varrho_1)(O + \varrho_2)(O + \varrho_3)(O + \varrho) = 0,$$

woraus folgt, wenn wir die Klammern durch Ausführung der Multiplikation entfernen,

$$O\varrho_2\varrho_3\varrho + \varrho_1 O\varrho_3\varrho + \varrho_1\varrho_2 O\varrho + \varrho_1\varrho_2\varrho_3 O = 0,$$

oder

$$O\{(\varrho_2\varrho_3 + \varrho_3\varrho_1 + \varrho_1\varrho_2)\varrho - \varrho_1\varrho_2\varrho_3\} = 0,$$

welche Gleichung nur mit

$$(\varrho_2\varrho_3 + \varrho_3\varrho_1 + \varrho_1\varrho_2)\varrho - \varrho_1\varrho_2\varrho_3 = 0 \qquad (2)$$

befriedigt werden kann, weil O nicht Null ist, und es ist die letzte Gleichung eine Streckengleichung der durch die Punkte A, B und C gehenden Ebene.

Wählen wir nun den Punkt O als Ursprung eines Parallelkoordinatensystemes, dessen Axen der x, y und z die Streckeneinheiten ε_1, ε_2 und ε_3 zukommen, und setzen wir

$$\varrho_k = x_k\varepsilon_1 + y_k\varepsilon_2 + z_k\varepsilon_3,$$

so ergiebt sich aus der Gleichung (2)

$$\begin{aligned}&\{(x_2\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + z_2\varepsilon_3)(x_3\varepsilon_1 + y_3\varepsilon_2 + z_3\varepsilon_3)\\ &+ (x_1\varepsilon_1 + y_1\varepsilon_2 + z_1\varepsilon_3)[(x_2 - x_3)\varepsilon_1 + (y_2 - y_3)\varepsilon_2\\ &+ (z_2 - z_3)\varepsilon_3]\}(x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3)\\ &- (x_1\varepsilon_1 + y_1\varepsilon_2 + z_1\varepsilon_3)(x_2\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + z_2\varepsilon_3)\\ &\times (x_3\varepsilon_1 + y_3\varepsilon_2 + z_3\varepsilon_3) = 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt durch Auflösung der Klammern ein aus einer Reihe von Gliedern bestehender Ausdruck, von denen jedes ein aus ε_1, ε_2 und ε_3 zusammengesetztes Produkt enthält, und bringen wir jedes Glied mit gehöriger Berücksichtigung des Vorzeichens des Streckenproduktes auf die Form $\pm m\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$, so dafs $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ gemeinschaftlicher Faktor aller Glieder wird, dann ergiebt sich, weil $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \gtrless 0$ ist,

$$\begin{aligned}&(y_2z_3 - y_3z_2 + y_3z_1 - y_1z_3 + y_1z_2 - y_2z_1)x\\ &+ (z_2x_3 - z_3x_2 + z_3x_1 - z_1x_3 + z_1x_2 - z_2x_1)y\\ &+ (x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 + x_1y_2 - x_2y_1)z\\ &= x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 + x_2y_3z_1 - x_2y_1z_3 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1.\end{aligned}$$

Damit ist die gewöhnliche Koordinatengleichung einer durch drei gegebene Punkte gehenden Ebene gewonnen, welche sich mittelst der gewöhnlichen Analysis nicht auf eine einfachere Form reduzieren läfst und für zu führende Untersuchungen höchst unpraktisch ist.

Setzen wir in (1)

$$A = \sum_{k=1}^{k=4} a_k E_k, \quad \dots \quad U = \sum_{k=1}^{k=4} u_k E_k,$$

so ergiebt sich unmittelbar

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & u_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & u_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & u_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & u_4 \end{vmatrix} = 0$$

als Gleichung der Ebene in homogenen Dreieckskoordinaten.

2) Sei U ein beliebiger Punkt des Raumes

$$u\,U = u_1 E_1 + u_2 E_2 + u_3 E_3 + u_4 E_4, \quad u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4.$$

Multiplizieren wir die Seiten dieser Gleichung nacheinander mit $E_2 E_3 E_4$, $E_3 E_4 E_1$, $E_4 E_1 E_2$ und $E_1 E_2 E_3$, so folgt

$$\left.\begin{aligned} u\,UE_2E_3E_4 &= u_1 E_1E_2E_3E_4, & u\,UE_3E_4E_1 &= -u_2E_1E_2E_3E_4, \\ u\,UE_4E_1E_2 &= u_3E_1E_2E_3E_4, & u\,UE_1E_2E_3 &= -u_4E_1E_2E_3E_4, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

mithin ist

$$UE_2E_3E_4 : UE_4E_3E_1 : UE_4E_1E_2 : UE_3E_2E_1 = u_1 : u_2 : u_3 : u_4,$$

welche Relation die Bedeutung der Koeffizienten der Fundamentalpunkte giebt.

Die Summation der Gleichungen (1) führt zu

$$UE_2E_3E_4 + UE_4E_3E_1 + UE_1E_2E_4 + UE_3E_2E_1 = E_1E_2E_3E_4.$$

„Die Summe der Pyramiden, deren gemeinsame Spitze ein beliebiger Punkt U des Raumes ist und deren Grundflächen nacheinander die Seitenflächen des Fundamentaltetraeders sind, ist stets dem Fundamentaltetraeder gleich.“

§ 11. Das äufsere Produkt aus fünf und mehr Punkten.

Wir haben, unserem Vorgange entsprechend,

$$ABCDE = A(B-A)(C-A)(D-A)(E-A),$$

aber das äufsere Produkt aus vier Strecken verschwindet stets, mithin auch das äufsere Produkt aus einem Punkte und vier Strecken, daher ist

$$ABCDE = 0$$

und weil demnach auch das äufsere Produkt aus sechs und mehr Punkten gleich Null ist, so resultiert der Satz:

Das äufsere Produkt aus fünf und mehr Punkten und ebenso das aus fünf und mehr Gröfsen ersten Grades des Raumes ist stets gleich Null.

Ist U ein variabler Punkt, dann ist

$$ABCDU = 0$$

eine Gleichung des variablen Punktes U, dessen geometrischer Ort der gesamte Raum als Punktsystem ist.

Die Erörterungen in diesem Abschnitte geben den allgemeinen Satz:

Findet zwischen einer Reihe von Gröfsen ersten Grades eine Abhängigkeitsgleichung statt, so ist ihr äufseres Produkt stets gleich Null.

§ 12. Geschichtliche Notiz.

Vor H. G. Grafsmann hatten bereits dessen Vater und Saint Venant den Begriff des äufseren Produktes aus zwei Strecken fixiert. Die multiplikative Verknüpfung von Punkten und Punktgröfsen rührt lediglich von Grafsmann her.

Viertes Kapitel.

Die Multiplikation von geometrischen Gebilden höherer Stufe.

Einleitung.

§ 1. Die Einheit des Systemes und die absolute Einheit.

Weil die äufsere Produktbildung eine beschränkte ist, denn das äufsere Produkt aus Gröfsen ersten Grades, welche in einer Zahlbeziehung stehen, verschwindet, es ist das äufsere Produkt aus drei Punkten in einer Geraden, aus drei Strecken in einer Ebene, aus vier Punkten in einer Ebene, aus vier Strecken des Raumes und aus fünf Punkten des Raumes gleich Null, so ist es notwendig, eine besondere Bestimmung zu treffen, um Produkte von denselben Eigenschaften, wie das äufsere Produkt zu erhalten, die im allgemeinen geltende Werte besitzen, gleichviel wie grofs die Anzahl ihrer Faktoren ist.

Das einfachste, um solches zu erreichen, ist die Annahme, dafs geometrische Gebilde als Repräsentanten der absoluten Einheit, der Zahl Eins aufgefafst werden, oder auch, dafs wir als geometrische Einheiten aufgefafsten Gebilden die Eigenschaft zuschreiben, den Wert eines jeden anderen, mit ihnen multiplizierten geometrischen Gebildes nicht zu verändern.

Jede Gröfse in einem Gebiete n^{ter} Stufe, $n = 1, 2, 3, 4$, läfst sich aus n in keiner Zahlbeziehung stehenden Gröfsen erster Stufe numerisch ableiten. In einem Gebiete n^{ter} Stufe liegen Gebiete $(n-1)^{ster}$, $(n-2)^{ter} \ldots$ und erster Stufe, in Beziehung auf sie nennen wir das Gebiet n^{ter} Stufe Hauptgebiet n^{ter} Stufe.

Ist n die Stufenzahl des Hauptgebietes, so ist das äufsere Produkt aus n von einander verschiedenen Gröfsen ersten Grades ein Vielfaches des äufseren Produktes aus den n von einander unabhängigen Elementen erster Stufe, aus welchen diese Gröfsen ersten Grades numerisch abgeleitet worden sind. Tritt zu den Faktoren dieses

Produktes noch ein weiterer Faktor hinzu, dann verschwindet das neue Produkt. Wählen wir aber das äufsere Produkt aus diesen n Elementen als den Repräsentanten der absoluten Einheit, oder sehen wir dasselbe als eine Gröfse an, welche auf die Änderung irgend eines anderen geometrischen Gebildes keinen Einflufs hat, wenn wir mit ihr dieses Gebilde multiplizieren, so wird das Produkt aus $(n+1)$ einfachen Faktoren ein Vielfaches seines letzten Faktors, das Produkt aus $(n+2)$ einfachen Faktoren ein Vielfaches des äufseren Produktes aus seinen beiden letzten Faktoren u. s. f., das Produkt aus $n+n=2n$ einfachen Faktoren wieder ein Vielfaches des äufseren Produktes aus den n ursprünglichen Elementen oder eine Zahl. Daher setzen wir, um Produkte mit geltendem Werte bei beliebiger Faktorenzahl zu erhalten, wenn $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ die n in keiner Zahlbeziehung stehenden Elemente erster Stufe des Systemes sind, aus denen alle ihm angehörenden Gröfsen sich ableiten lassen, das äufsere Produkt aus diesen Elementen gleich der absoluten Einheit,

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n = 1.$$

Ist nun α_k eine aus diesen Elementen abgeleitete Gröfse ersten Grades, dann ist das äufsere Produkt $(\alpha_1 \alpha_2)$ eine Gröfse zweiten Grades, das äufsere Produkt $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ eine Gröfse dritten Grades u. s. f., das äufsere Produkt

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = p(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n) = p$$

eine Gröfse n^{ten} Grades, resp. ein Vielfaches der Einheit des Systemes oder der absoluten Einheit. Weiter erhalten wir

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) \alpha_{n+1} = p \alpha_{n+1},$$

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} \alpha_{n+2} = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) \alpha_{n+1} \alpha_{n+2} = p(\alpha_{n+1} \alpha_{n+2}),$$

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \alpha_{n+3} = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) \alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \alpha_{n+3} = p(\alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \alpha_{n+3}),$$

. . . .

. . . .

Die Stufenzahl des Hauptgebietes ist n, diejenige einer Gröfse ersten Grades in ihm gleich Eins, die Summe der Stufenzahlen der Faktoren eines Produktes aus Gröfsen ersten Grades ist gleich der Anzahl seiner Faktoren. Ist m die Faktorenzahl und $m < n$, dann ist die Stufenzahl des Produktes gleich m, gleich der Faktorenzahl, mit $m = n$ wird das Ergebnis eine Zahl, mit $m > n$ und $m < 2n$ ist $(m - n)$ die Stufenzahl des Produktes u. s. f. Teilen wir die Summe der Stufenzahlen der Faktoren durch die Stufenzahl des Hauptgebietes, dann bleibt ein Rest, welcher die Stufenzahl des Produktes angiebt, ist insbesondere der Rest gleich Null, dann ist das Ergebnis ein Vielfaches der Einheit des Systemes, der absoluten Einheit.

Dabei setzen wir voraus, dafs das Produkt keine gleichen Faktoren enthält, denn dann ist sein Wert gleich Null.

Die Stufenzahl des Produktes aus beliebig vielen ungleichen Gröfsen ersten Grades ist gleich dem verbleibenden Reste, wenn die Summe der Stufenzahlen seiner Faktoren, welche gleich der Anzahl der Faktoren ist, durch die Stufenzahl des Hauptgebietes geteilt wird.

Für die Rechnung mit Strecken setzen wir deshalb in der Geraden $\varepsilon = 1$, in der Ebene $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$, im Raume $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 1$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dafs sowohl in der Ebene als auch im Raume die Faktoren dieser Einheitsprodukte wechselseitig aufeinander senkrecht stehen und gleiche Längen, die Längen Eins besitzen, dadurch wird für die Ebene ein Quadrat, für den Raum ein Würfel die geometrische Einheit, welche die Zahl Eins repräsentiert.

Für die Rechnung mit Punkten nehmen wir im Elementarsysteme erster Stufe den Fundamentalpunkt als Einheit, im Elementarsysteme zweiter Stufe das äufsere Produkt aus den beiden Fundamentalpunkten, den Linienteil $E_1 E_2 = 1$, für das Elementarsystem dritter Stufe setzen wir den Flächenteil der Fundamentalpunkte $E_1 E_2 E_3 = 1$ und im Elementarsysteme vierter Stufe hat das äufsere Produkt aus den Eckpunkten des Fundamentaltetraeders als Einheit des Systemes zu gelten, ist $E_1 E_2 E_3 E_4 = 1$ zu nehmen.

Weil ein äufseres Produkt nullter Stufe eine reelle Zahl ist und weil eine reelle Zahl als Multiplikator den Karakter eines geometrischen Gebildes nicht ändert, sehen wir die reellen Zahlen in Verbindung mit geometrischen Gröfsen als von nullter Stufe an.

Das äufsere Produkt $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots . \varepsilon_n)$ an sich ist von n^{ter}, als Repräsentant der absoluten Einheit im Systeme n^{ter} Stufe ist es dagegen von nullter Stufe.

Im Gegensatze zu der absoluten Einheit, der Einheit des Systemes, nennen wir die geometrischen Elemente, durch deren äufseres Produkt die absolute Einheit dargestellt wird, ursprüngliche oder relative Einheiten.

Aufser den ursprünglichen Einheiten und der Einheit des Systemes enthält das letztere noch Einheiten zweiter, dritter, ... $(n - 1)^{\text{ster}}$ Stufe, welche die äufseren Produkte aus zwei, drei, ... $(n - 1)$ relativen Einheiten sind und nur geometrische Gröfsen, nicht auch absolute Einheiten darstellen, denn erst das äufsere Produkt aus den n relativen Einheiten ist Repräsentant der absoluten Einheit.

§ 2. Die Ergänzung.

Infolge der in dem vorigen Paragraphen festgesetzten Hypothese sind wir imstande sowohl Produkte aus Strecken als auch solche aus Punkten auszuwerten, wenn die Faktorenzahl eine ganz beliebige ist.

Um nun aber auch Produkte aus geometrischen Gröſsen höherer Stufe bestimmen und umformen zu können, bedarf es noch eines weiteren Begriffes, des Begriffes der Ergänzung.

Für jedes System n^{ter} Stufe ist

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n = 1, \tag{1}$$

das äuſsere Produkt aus den n in keiner Zahlbeziehung stehenden ursprünglichen Einheiten der absoluten Einheit gleich.

Ist das äuſsere Produkt $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_r)$, $r < n$, gegeben, dann ist dasselbe noch mit dem äuſseren Produkte aus den übrigen relativen Einheiten, mit $(\varepsilon_{r+1} \dots \varepsilon_n)$ äuſserlich zu multiplizieren, damit die Einheit des Systemes erscheint, weshalb wir sagen, es sei die Ergänzung des äuſseren Produktes $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_r)$ das äuſsere Produkt $(\varepsilon_{r+1} \dots \varepsilon_n)$, und schreiben

$$|(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_r) = (\varepsilon_{r+1} \dots \varepsilon_n).$$

Es ist also die Stufenzahl der Ergänzuung gleich der Differenz aus der Stufenzahl des Hauptgebietes und der des gegebenen Produktes.

Der vertikale Strich heiſst Ergänzungsstrich und wird „Ergänzung“ gelesen.

Zufolge der Gleichung (1) dürfen wir schreiben

$$|(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_r) = \{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_r)(\varepsilon_{r+1} \dots \varepsilon_n)\}(\varepsilon_{r+1} \dots \varepsilon_n).$$

Ist nun $E = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_r)$, oder das äuſsere Produkt aus irgend r ursprünglichen Einheiten, $r \leqq n$, $E' = (\varepsilon_{r+1} \dots \varepsilon_n)$, oder das äuſsere Produkt aus den übrigen ursprünglichen Einheiten, dann haben wir

$$|E = (EE')E', \quad EE' = \pm 1.$$

Ist in dem Gebiete n^{ter} Stufe das äuſsere Produkt aus den ursprünglichen Einheiten der absoluten Einheit des Systemes äquivalent, E eine Einheit beliebiger Stufe, d. h. entweder eine relative Einheit oder ein äuſseres Produkt aus mehreren derselben, so ist die Ergänzung von E diejenige Gröſse E', welche dem äuſseren Produkte aus allen in E nicht vorkommenden relativen Einheiten gleich oder entgegengesetzt ist, je nachdem das äuſsere Produkt (EE') der absoluten Einheit gleich oder entgegengesetzt ist.

Substituieren wir in die letzte Gleichung für E' die Gröfse mE, dann folgt

$$|mE = m(EE')E' = (EE')mE',$$

und setzen wir in dieser Gleichung $E = 1$, was wegen (1) nach sich zieht, dafs E' verschwindet, so ergiebt sich

$$|m = m.$$

Die Ergänzung einer reellen Zahl ist stets dieser Zahl äquivalent.

Das äufsere Produkt aus irgend welchen Gröfsen im Gebiete n^{ter} Stufe nennen wir unter der Voraussetzung, dafs $\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots . \varepsilon_n = 1$ ist, das auf dieses Gebiet als Hauptgebiet bezügliche Produkt, kurzweg ihr Produkt in diesem Gebiete. Die in dem Vorstehenden entwickelten Begriffe genügen für die Behandlung der multiplikativen Verknüpfung von Gebilden höherer Stufe als der ersten in den verschiedenen geometrischen Systemen.

In der Geraden als Streckensystem ist mit $\varepsilon = 1$ jede Strecke und somit auch die Ergänzung jeder Strecke, das Produkt aus beliebig vielen Strecken äquivalent einer Zahl, so dafs wir dieses System erster Stufe nicht weiter zu betrachten haben. Entsprechendes gilt für das Gebiet eines Punktes.

Erster Abschnitt.

Die Multiplikation in der Ebene als System zweiter Stufe.

§ 3. Produkte aus Strecken.

Als Einheit des Systemes wählen wir ein Quadrat, von welchem die ursprünglichen Einheiten ε_1 und ε_2 zwei in einer Ecke zusammenstofsende Seiten sind, wir setzen

$$(\varepsilon_1\varepsilon_2) = \varepsilon_1\varepsilon_2 = 1,$$

und es ist

$$\varepsilon_2\varepsilon_1 = -\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1.$$

Nun sei

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2, \quad \beta = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2, \quad \gamma = c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2, \ldots$$

dann ist

$$\alpha\beta = (a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2)(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2) = (a_1b_2 - a_2b_1)\varepsilon_1\varepsilon_2 = a_1b_2 - a_2b_1,$$
$$\alpha\beta\gamma = (a_1b_2 - a_2b_1)(c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2),$$

. . . .
. . . .

Das äufsere Produkt, oder das auf das Hauptgebiet zweiter Stufe als Ebene bezügliche Produkt aus zwei Strecken ist ein Vielfaches der Einheit des Systemes, eine Zahl, dasjenige aus drei Strecken eine Strecke u. s. f.

§ 4. **Einführung des Begriffes der Ergänzung.**

Wir können uns hierbei auf den in § 2 entwickelten Satz stützen, aber auch direkt verfahren.

Damit aus den beiden relativen Einheiten des Systemes die Einheit des Systemes, resp. die absolute Einheit hervorgehe, haben wir ε_1 mit ε_2 äufserlich zu multiplizieren, daher ist

$$|\varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad \text{weil } \varepsilon_1\varepsilon_2 = 1 \text{ ist,}$$

$$|\varepsilon_2 = -\varepsilon_1, \quad \text{weil } \varepsilon_2\varepsilon_1 = -1 \text{ ist,}$$

auch ist

$$|\varepsilon_1 = (\varepsilon_1\varepsilon_2)\varepsilon_2, \quad |\varepsilon_2 = (\varepsilon_2\varepsilon_1)\varepsilon_1.$$

Aus den Gleichungen

$$|\varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad |\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$$

folgt, wenn wir auf beiden Seiten derselben die Ergänzungen nehmen,

$$|(|\varepsilon_1) = |\varepsilon_2, \quad |(|\varepsilon_2) = -|(\varepsilon_1),$$

d. i.

$$||\varepsilon_1 = -\varepsilon_1 \quad ||\varepsilon_2 = -\varepsilon_2.$$

Ferner haben wir

$$|(||\varepsilon_1) = -|\varepsilon_1, \quad |(||\varepsilon_2) = -|\varepsilon_2,$$

d. i.

$$|||\varepsilon_1 = -\varepsilon_2, \quad |||\varepsilon_2 = \varepsilon_1.$$

Endlich ergiebt sich

$$|(|||\varepsilon_1) = -|\varepsilon_2, \quad |(|||\varepsilon_2) = |\varepsilon_1,$$

d. i.

$$||||\varepsilon_1 = \varepsilon_1, \quad ||||\varepsilon_2 = \varepsilon_2.$$

Der Ergänzungsstrich operiert in der Ebene wie der Drehungs- oder Schwenkungsfaktor $i = \sqrt{-1}$, er dreht jede Einheitsstrecke durch einen rechten Winkel.

Es ist

$$|\varepsilon_1 = i\varepsilon_1, \quad ||\varepsilon_1 = i^2\varepsilon_1, \quad |||\varepsilon_1 = i^3\varepsilon_1, \quad ||||\varepsilon_1 = i^4\varepsilon_1, \ldots.$$

Verstehen wir unter n eine reelle ganze Zahl, dann haben wir

$$|^n = i^n, \quad |^n\varepsilon_1 = i^n\varepsilon_1.$$

Infolge der Eigenschaft des Ergänzungsstriches ergiebt sich, wenn α irgend eine Strecke bedeutet, unmittelbar

$$|\alpha = i\alpha.$$

Die Ergänzung einer Strecke ist eine zu dieser normale Strecke von derselben Länge, sie wird erhalten, wenn wir die gegebene Strecke um ihr Anfangselement durch einen rechten Winkel im positiven Sinne in der Ebene drehen.

Nehmen wir

$$\alpha = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2,$$

so ergiebt sich, weil der Ergänzungsstrich wie der Faktor i operiert, eine Zahl ungeändert läfst,

$$|\alpha = |(a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2) = a_1 | \varepsilon_1 + a_2 | \varepsilon_2,$$

$$|\alpha = a_1 \varepsilon_2 - a_2 \varepsilon_1.$$

Sind mithin die beiden Strecken α und β gegeben durch

$$\alpha = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2, \quad \beta = a_1 \varepsilon_2 - a_2 \varepsilon_1,$$

so sind die Strecken zu einander senkrecht und von gleichen Längen, weil dann

$$\beta = i\alpha$$

ist, sagen wir, es sei β aus α durch zirkuläre Änderung hervorgegangen.

Weiter leiten wir ab

$$|^2\alpha = i^2\alpha = - \alpha = -(a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2),$$

$$|^3\alpha = i^3\alpha = - |\alpha = - |(a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2) = - a_1 \varepsilon_2 + a_2 \varepsilon_1,$$

$$|^4\alpha = i^4\alpha = \alpha = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2.$$

Das Produkt aus einer ursprünglichen Einheit und deren Ergänzung nennen wir das innere Quadrat der ersteren. Wir erhalten

$$\varepsilon_1 | \varepsilon_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1, \quad \varepsilon_2 | \varepsilon_2 = \varepsilon_2(-\varepsilon_1) = -\varepsilon_2 \varepsilon_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$$

und schreiben

$$\varepsilon_1{}^2 = 1, \quad \varepsilon_2{}^2 = 1.$$

Das innere Quadrat einer relativen Einheit ist äquivalent der Einheit des Systemes, gleich der absoluten Einheit.

Ferner haben wir

$$\varepsilon_1 | \varepsilon_2 = \varepsilon_1(-\varepsilon_1) = -\varepsilon_1 \varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 | \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \varepsilon_2 = 0.$$

Das Produkt aus einer der relativen Einheiten und der Ergänzung der anderen verschwindet.

§ 5. Das innere Produkt aus zwei Strecken.

Nunmehr betrachten wir das Produkt aus einer beliebigen Strecke und der Ergänzung einer anderen beliebigen Strecke. Zu dem Ende sei

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2, \quad \beta = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2.$$

Damit ergiebt sich

$$\alpha|\beta = (a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2)(b_1\varepsilon_2 - b_2\varepsilon_1) = (a_1b_1 + a_2b_2)\varepsilon_1\varepsilon_2 = a_1b_1 + a_2b_2,$$
$$\beta|\alpha = (b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)(a_1\varepsilon_2 - a_2\varepsilon_1) = (a_1b_1 + a_2b_2)\varepsilon_1\varepsilon_2 = a_1b_1 + a_2b_2,$$

mithin erhalten wir

$$\alpha|\beta = \beta|\alpha.$$

Ist insbesondere $\beta = m\alpha$, und bedeutet ε die Streckeneinheit von α, dann haben wir

$$\alpha|\beta = \alpha|m\alpha = m\alpha|\alpha = m\alpha^2$$
$$= m(a\varepsilon)|(a\varepsilon) = ma^2\varepsilon|\varepsilon = ma^2$$
$$= m(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2)(a_1\varepsilon_2 - a_2\varepsilon_1) = m(a_1{}^2 + a_2{}^2)\varepsilon_1\varepsilon_2 = m(a_1{}^2 + a_2{}^2).$$

Nehmen wir ferner $\beta = m|\alpha$, so bekommen wir

$$\alpha|\beta = \alpha|(m|\alpha) = \alpha(m|^2\alpha) = \alpha(-m\alpha) = -m\alpha\alpha = 0,$$
$$\alpha|\beta = m(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2)(-a_1\varepsilon_1 - a_2\varepsilon_2) = m\cdot 0 = 0.$$

Weil hiernach dieses Produkt geltenden Wert hat, wenn seine Faktoren gleichartig, wenn sie parallel sind, resp. ineinander liegen, verschwindet, wenn sie zu einander normal sind, nennen wir dasselbe ein inneres Produkt.

Die Faktoren des inneren Produktes aus zwei Strecken sind ohne Zeichenwechsel vertauschbar, dasselbe behält geltenden Wert, wenn seine Faktoren gleichartig sind, wenn sie in einer Geraden liegen, und es verschwindet, wenn sie aufeinander senkrecht stehen.

Wenn $\beta = \alpha$ ist und $\alpha = a\varepsilon$ gesetzt wird, ergiebt sich

$$\alpha|\alpha = \alpha^2 = (a\varepsilon)|(a\varepsilon) = a^2\varepsilon|\varepsilon = a^2,$$
$$a = \sqrt{\alpha^2}.$$

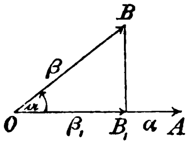
Das innere Quadrat einer Strecke ist äquivalent dem Quadrate ihrer Länge. Die Länge einer Strecke ist der Quadratwurzel aus ihrem inneren Quadrate gleich.

§ 6. Äufseres und inneres Produkt aus zwei Strecken.

Sei $\overline{OA} = \alpha = a\varepsilon_1$, $\overline{OB} = \beta = b\varepsilon$ (Fig. 32) und der von diesen Strecken eingeschlossene Winkel, $\sphericalangle(\alpha, \beta) = \mathfrak{a}$. Fällen wir vom Punkte B auf den Träger von α das Lot $\overline{BB_1}$, dann ist

$$\overline{OB} = \overline{OB_1} + \overline{B_1B} = \beta_1 + \beta_2 = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2,$$ womit sich ergiebt

Fig. 32.



$$\alpha\beta = \alpha(\beta_1 + \beta_2) = \alpha\beta_2,$$
$$\alpha\beta = (a\varepsilon_1)(b_2\varepsilon_2) = ab_2\varepsilon_1\varepsilon_2 = ab_2,$$
$$\alpha|\beta = \alpha|(\beta_1 + \beta_2) = \alpha|\beta_1,$$
$$\alpha|\beta = (a\varepsilon_1)|(b_1\varepsilon_1) = ab_1\varepsilon_1|\varepsilon_1 = ab_1,$$

denn es ist $\alpha\beta_1 = 0$, $\alpha|\beta_2 = 0$, weil im ersten Falle α und β_1 gleichartig sind, im zweiten α und β_2 aufeinander senkrecht stehen.

Setzen wir nun

$$\frac{\sqrt{\beta_2^2}}{\sqrt{\beta^2}} = \frac{b_2}{b} = \sin\mathfrak{a}, \quad \frac{\sqrt{\beta_1^2}}{\sqrt{\beta^2}} = \frac{b_1}{b} = \cos\mathfrak{a},$$

so ergiebt sich

$$\alpha\beta = ab\sin\mathfrak{a}, \quad \alpha|\beta = ab\cos\mathfrak{a},$$

wodurch die Zahlwerte des äufseren und inneren Produktes aus zwei Strecken durch ihre Längen und den von ihnen eingeschlossenen Winkel ausgedrückt sind.

Das äufsere Produkt aus zwei Strecken im Systeme zweiter Stufe ist äquivalent dem Produkte aus den Längen seiner Faktoren und dem Sinus des von diesen eingeschlossenen Winkels.

Das innere Produkt aus zwei Strecken im Systeme zweiter Stufe ist äquivalent dem Produkte aus den Längen seiner Faktoren und dem Cosinus des von diesen eingeschlossenen Winkels.

Setzen wir $|\beta = i\beta = \beta'$, dann ist

$$\alpha|\beta = \alpha\beta', \quad ab\cos(\alpha, \beta) = ab\sin(\alpha, \beta'),$$
$$\cos(\alpha, \beta) = \sin(\alpha, \beta'),$$

und nehmen wir $\beta = |\beta''$, d. i. $\beta'' = i^3\beta$, so ergiebt sich

$$\alpha\beta = \alpha|\beta'', \quad ab\sin(\alpha, \beta) = ab\cos(\alpha, \beta'')$$
$$\sin\mathfrak{a} = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \mathfrak{a}\right).$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen dem inneren und äufseren Produkte aus zwei Strecken dargethan, jedes innere Produkt kann durch ein äufseres und jedes äufsere durch ein inneres Produkt ersetzt werden.

§ 7. Die Ergänzung einer Summe von Strecken und das Distributivitätsgesetz des inneren Produktes aus zwei Strecken.

Die Multiplikation in der Gleichung

$$\alpha + \beta = \gamma$$

mit dem Drehfaktor i ergiebt

$$i(\alpha + \beta) = i\alpha + i\beta = i\gamma$$

d. h.

$$|(\alpha + \beta) = |\alpha + |\beta = |\gamma .$$

Die Ergänzung einer Summe von Strecken ist gleich der Summe der Ergänzungen ihrer Posten, und die Summe der Ergänzungen von Strecken ist gleich der Ergänzung der Summe dieser Strecken.

Sei $|\beta = \beta_1$, $|\gamma = \gamma_1$, $|\alpha = \alpha_1$, dann ist

$$\alpha|(\beta + \gamma) = \alpha(|\beta + |\gamma) = \alpha(\beta_1 + \gamma_1) = \alpha\beta_1 + \alpha\gamma_1 = \alpha|\beta + \alpha|\gamma,$$

$$(\beta + \gamma)|\alpha = (\beta + \gamma)\alpha_1 = \beta\alpha_1 + \gamma\alpha_1 = \beta|\alpha + \gamma|\alpha,$$

es ist also

$$\alpha|(\beta + \gamma) = \alpha|\beta + \alpha|\gamma, \quad (\beta + \gamma)|\alpha = \beta|\alpha + \gamma|\alpha,$$

welche Relationen die vollkommene Distributivität des inneren Produktes zweier Strecken in der Ebene ausdrücken, welche bereits darin liegt, dafs für das innere Produkt ein äufseres substituiert werden kann.

§ 8. Das Produkt aus den Ergänzungen von zwei Strecken.

Wir haben die Gleichungen

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1, \quad |(\varepsilon_1\varepsilon_2) = 1,$$

$$|\varepsilon_1|\varepsilon_2 = \varepsilon_2(-\varepsilon_1) = \varepsilon_1\varepsilon_2 = 1,$$

folglich ist

$$|\varepsilon_1|\varepsilon_2 = |(\varepsilon_1\varepsilon_2).$$

Nun ergiebt sich, wenn wir nehmen,

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2, \quad \beta = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2$$

$$|(\alpha\beta) = |[(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2)(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)] = |\{[a_1b_2 - a_2b_1]\,\varepsilon_1\varepsilon_2\}$$
$$= [a_1b_2 - a_2b_1]|(\varepsilon_1\varepsilon_2) = (a_1b_2 - a_2b_1),$$
$$|\alpha|\beta = (a_1\varepsilon_2 - a_2\varepsilon_1)(b_1\varepsilon_2 - b_2\varepsilon_1) = (a_1b_2 - a_2b_1)\varepsilon_1\varepsilon_2$$
$$= (a_1b_2 - a_2b_1),$$

folglich ist

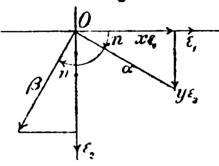
$$|\alpha|\beta = |(\alpha\beta).$$

Das Produkt aus den Ergänzungen von zwei Strecken in der Ebene ist gleich der Ergänzung des Produktes aus diesen Strecken.

§ 9. Ableitung der Grundformeln der Goniometrie.

Es seien α und β zwei in demselben Punkte O entspringende, zu einander senkrechte Strecken (Fig. 33), von denen jede die Länge Eins besitzt,

Fig. 33.



$$\alpha = i^n\varepsilon_1 = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2,$$
$$\beta = i\alpha = i^{n+1}\varepsilon_1 = i^n\varepsilon_2 = xi\varepsilon_1 + yi\varepsilon_2 = x\varepsilon_2 - y\varepsilon_1,$$

in welchem Falle wir sagen, dafs die Strecken α und β aus den ursprünglichen Einheiten ε_1 und ε_2 durch zirkuläre Änderungen hervorgegangen seien.

Zunächst ist

$$\alpha^2 = (i^n\varepsilon_1)^2 = (x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2)^2 = (x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2)|(x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2),$$

woraus folgt

$$1 = x^2 + y^2. \tag{1}$$

Ferner haben wir

$$i^n\varepsilon_1 = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 = x\varepsilon_1 + yi\varepsilon_1 = (x + yi)\varepsilon_1,$$

demnach mufs sein

$$i^n = x + yi. \tag{2}$$

Weiter erhalten wir

$$1 = x^2 + y^2 = (x + yi)(x - yi) = i^n(x - yi),$$

woraus hervorgeht

$$i^{-n} = x - yi. \tag{3}$$

Nun ergiebt sich durch (2) + (3), sodann durch (2) — (3)

$$x = \frac{i^n + i^{-n}}{2}, \quad y = \frac{i^n - i^{-n}}{2i},$$

wobei $n = \frac{2\mathfrak{a}}{\pi}$ ist, wenn $\sphericalangle(\varepsilon_1, \alpha) = \mathfrak{a}$ gesetzt wird.

Setzen wir jetzt

$$x = \frac{\sqrt{(x\varepsilon_1)^2}}{\sqrt{\alpha^2}} = \cos \mathfrak{a}, \quad y = \frac{\sqrt{(y\varepsilon_2)^2}}{\sqrt{\alpha^2}} = \sin \mathfrak{a},$$

dann folgt

$$\cos \mathfrak{a} = \frac{i^n + i^{-n}}{2} = \frac{i^{\frac{2\mathfrak{a}}{\pi}} + i^{-\frac{2\mathfrak{a}}{\pi}}}{2}, \tag{4}$$

$$\sin \mathfrak{a} = \frac{i^n - i^{-n}}{2i} = \frac{i^{\frac{2\mathfrak{a}}{\pi}} - i^{-\frac{2\mathfrak{a}}{\pi}}}{2i}, \tag{5}$$

und daraus geht hervor

$$\operatorname{tg} \mathfrak{a} = \frac{y}{x} = \frac{\sin \mathfrak{a}}{\cos \mathfrak{a}} = -\frac{i^n - i^{-n}}{i^n + i^{-n}}\, i,$$

$$\operatorname{cotg} \mathfrak{a} = \frac{x}{y} = \frac{\cos \mathfrak{a}}{\sin \mathfrak{a}} = \frac{i^n + i^{-n}}{i^n - i^{-n}}\, i,$$

Noch haben wir

$$\varepsilon_1 \,|\, \alpha = (x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2) \,|\, \varepsilon_1 = x,$$

$$\varepsilon_1 \alpha = \varepsilon_1(x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2) = y,$$

so dafs auch ist

$$\cos \mathfrak{a} = \varepsilon_1 \,|\, \alpha, \quad \sin \mathfrak{a} = \varepsilon_1 \alpha,$$

$$\operatorname{tg} \mathfrak{a} = \frac{\varepsilon_1 \alpha}{\varepsilon_1 \,|\, \alpha}, \quad \operatorname{cotg} \mathfrak{a} = \frac{\varepsilon_1 \,|\, \alpha}{\varepsilon_1 \alpha}.$$

Aus diesen Relationen folgt mit $\alpha = \varepsilon_1, \varepsilon_2, -\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \varepsilon_1$, dafs

$$\cos 0 = 1, \quad \cos \tfrac{1}{2}\pi = 0, \quad \cos \pi = -1, \quad \cos \tfrac{3}{2}\pi = 0, \quad \cos 2\pi = 1,$$

$$\sin 0 = 0, \quad \sin \tfrac{1}{2}\pi = 1, \quad \sin \pi = 0, \quad \sin \tfrac{3}{2}\pi = -1, \quad \sin 2\pi = 0$$

ist, zu welchen Resultaten wir auch gelangen, wenn wir in den Formeln (4) und (5) nacheinander $n = 0, 1, 2, 3, 4$ setzen.

Substituieren wir in (4) und (5) an Stelle von $\mathfrak{a}$ den entgegengesetzten Winkel $-\mathfrak{a}$ und dem entsprechend $-n$ für n, so ergiebt sich

$$\cos(-\mathfrak{a}) = \frac{i^{-n} + i^{+n}}{2} = \frac{i^n + i^{-n}}{2} = \cos \mathfrak{a}, \tag{6}$$

$$\sin(-\mathfrak{a}) = \frac{i^{-n} - i^{+n}}{2i} = -\frac{i^n - i^{-n}}{2i} = -\sin \mathfrak{a}. \tag{7}$$

Um den Cosinus und den Sinus der Summe und der Differenz zweier Winkel zu entwickeln, sei

$$i^{n_1} = x_1 + y_1 i, \quad i^{n_2} = x_2 + y_2 i, \quad i^{n_1 + n_2} = x + yi,$$

dann ist

$$i^{n_1+n_2} = i^{n_1} i^{n_2} = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i),$$

mithin haben wir

$$x + yi = x_1x_2 - y_1y_2 + (y_1x_2 + x_1y_2)i,$$

welche Gleichung nur dann existieren kann, wenn

$$x = x_1x_2 - y_1y_2, \quad y = y_1x_2 + x_1y_2$$

ist, was zu den Relationen führt

$$\cos(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) = \cos\mathfrak{a}_1 \cos\mathfrak{a}_2 - \sin\mathfrak{a}_1 \sin\mathfrak{a}_2,$$
$$\sin(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) = \sin\mathfrak{a}_1 \cos\mathfrak{a}_2 + \cos\mathfrak{a}_1 \sin\mathfrak{a}_2,$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (6) und (7)

$$\cos(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2) = \cos\mathfrak{a}_1 \cos\mathfrak{a}_2 + \sin\mathfrak{a}_1 \sin\mathfrak{a}_2,$$
$$\sin(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2) = \sin\mathfrak{a}_1 \cos\mathfrak{a}_2 - \cos\mathfrak{a}_1 \sin\mathfrak{a}_2.$$

Setzen wir in diesen Formeln $\mathfrak{a}_1 = \frac{1}{2}\pi$, $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}$, dann finden wir

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi + \mathfrak{a}\right) = -\sin\mathfrak{a}, \quad \sin\left(\frac{1}{2}\pi + \mathfrak{a}\right) = \cos\mathfrak{a},$$
$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \mathfrak{a}\right) = \sin\mathfrak{a}, \quad \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \mathfrak{a}\right) = \cos\mathfrak{a},$$

und ebenso ergeben sich hieraus die entsprechenden Formeln für $\cos(\pi \pm \mathfrak{a})$, $\sin(\pi \pm \mathfrak{a})$, wenn wir $\mathfrak{a}_1 = \pi$, $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}$ wählen u. s. f.

Nehmen wir jetzt insbesondere $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $n_1 = n_2 = n$ an, dann ist

$$x = x_1^2 - y_1^2, \quad y = 2x_1y_1,$$

mithin haben wir

$$\cos 2\mathfrak{a} = \cos^2\mathfrak{a} - \sin^2\mathfrak{a}, \quad \sin 2\mathfrak{a} = 2\sin\mathfrak{a}\cos\mathfrak{a}.$$

Weil

$$x_1^2 + y_1^2 = 1, \quad x = x_1^2 - y_1^2$$

ist, so erhalten wir noch

$$x_1^2 = \frac{1+x}{2}, \quad y_1^2 = \frac{1-x}{2},$$

daher entstehen die Relationen

$$\cos^2\mathfrak{a} = \frac{1+\cos 2\mathfrak{a}}{2}, \quad \sin^2\mathfrak{a} = \frac{1-\cos 2\mathfrak{a}}{2}.$$

Aus der Gleichung

$$\gamma = \alpha + \beta \tag{8}$$

folgt durch innere Quadratur ihrer Seiten

$$\gamma^2 = (\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)|(\alpha + \beta),$$
$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha|\beta,$$

d. h.

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha, \beta).$$

Ferner bekommen wir, wenn wir die Seiten der Gleichung (8) mit $|\gamma$ multiplizieren,

$$\gamma^2 = \alpha|\gamma + \beta|\gamma,$$

d. i.

$$c = a \cos(\alpha, \gamma) + b \cos(\beta, \gamma).$$

Multiplizieren wir dieselbe Gleichung nacheinander mit α, β und γ, so folgt

$$\alpha\gamma = \alpha\beta, \quad \beta\gamma = \beta\alpha, \quad \gamma\alpha = \beta\gamma,$$

mithin ist

$$\alpha\beta = \gamma\beta = \alpha\gamma,$$

d. h.

$$ab \sin(\alpha, \beta) = bc \sin(\gamma, \beta) = ca \sin(\alpha, \gamma),$$

woraus hervorgeht

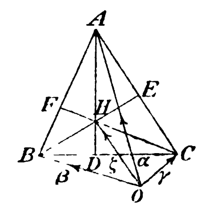
$$a : b : c = \sin(\gamma, \beta) : \sin(\alpha, \gamma) : \sin(\alpha, \beta).$$

§ 10. **Lösung planimetrischer Aufgaben.**

1) „Die drei Höhenlinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte."

Seien α, β und γ die Träger der Eckpunkte A, B und C des Dreiecks ABC bezüglich des Punktes O (Fig. 34), sei H der Schnittpunkt der aus A und B auf die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ gefällten Lote $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$, $\overline{OH} = \zeta$. Weil das innere Produkt aus zwei zu einander senkrechten Strecken verschwindet, so ist

Fig. 34.



$$(\zeta - \alpha)|(\beta - \gamma) = 0 \text{ für die erste Höhe,}$$
$$(\zeta - \beta)|(\gamma - \alpha) = 0 \text{ für die zweite Höhe,}$$

oder

$$\zeta|(\beta - \gamma) - \alpha|(\beta - \gamma) = 0,$$
$$\zeta|(\gamma - \alpha) - \beta|(\gamma - \alpha) = 0.$$

Durch die Addition der beiden letzten Gleichungen ergiebt sich

$$(\zeta - \gamma)|(\beta - \alpha) = 0.$$

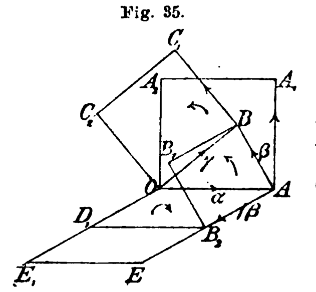
Demnach steht die durch die Punkte C und H gehende gerade Linie auf der Dreiecksseite $\overline{AB}$ senkrecht, sie fällt sonach mit der dritten Höhenlinie $\overline{CF}$ des Dreiecks zusammen. Daher schneiden sich die drei Höhenlinien eines Dreiecks in einem Punkte.

2) Seien die Seiten eines Dreiecks $\overline{OA} = \alpha$, $\overline{AB} = \beta$, $\overline{OB} = \gamma$ (Fig. 35), so dafs

$$\gamma = \alpha + \beta$$

ist. — Die innere Quadratur der beiden Seiten dieser Gleichung giebt

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha|\beta.$$


Fig. 35.

Diese Gleichung sagt uns:

„Das Quadrat über einer Seite eines Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Dreiecksseiten und dem doppelten Parallelogramme aus einer dieser Seiten und der Ergänzung der anderen Seite.“

Auf die Figur übertragen heifst dies:

$$\# \, OBC_1C_2 = \# \, OAA_1A_2 + \# \, ABB_1B_2 + 2 \# \, OAB_2D_1,$$

$$\# \, OBC_1C_2 = \# \, OAA_1A_2 + \# \, ABB_1B_2 - \# \, OE_1EA,$$

und nur die Lage der Spathecke ist die richtige, welche die Figur giebt.

Nun ist mit $\alpha|\beta = 0$, also für ein rechtwinkliges Dreieck,

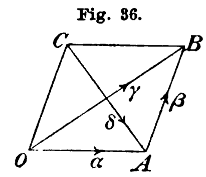
$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

In diesem Falle verschwindet das Parallelogramm $OAEE_1$ und es ist

$$\# \, OBC_1C_2 = \# \, OAA_1A_2 + \# \, ABB_1B_2,$$

womit das Bild für den Satz des Pythagoras gegeben ist.

3) Sei die Figur $OABC$ (Fig. 36) ein Parallelogramm,


Fig. 36.

$$\overline{OA} = \alpha, \quad \overline{AB} = \beta,$$
$$\overline{OB} = \gamma, \quad \overline{CA} = \delta,$$

womit wir haben

$$\gamma = \alpha + \beta, \quad \delta = \alpha - \beta. \tag{1}$$

Werden die Seiten dieser Gleichungen auf das innere Quadrat erhoben, dann ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \gamma^2 &= (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha|\beta + \beta^2, \\ \delta^2 &= (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha|\beta + \beta^2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Addition der Gleichungen (2) führt zu

$$\gamma^2 + \delta^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2).$$

„Die Summe der Quadrate über den Diagonalen eines Parallelogrammes ist gleich der Summe der Quadrate über seinen Seiten."

Die Subtraktion der zweiten von der ersten der Gleichungen (2) giebt

$$\gamma^2 - \delta^2 = 4\alpha|\beta.$$

„Die Differenz der Quadrate über den Diagonalen eines Parallelogrammes ist gleich dem vierfachen Spathecke über einer seiner Seiten und der Ergänzung der anstofsenden Seite."

Aus den Gleichungen (1) folgt

$$\gamma|\delta = (\alpha + \beta)|(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2.$$

„Das Spatheck über einer Diagonalen und der Ergänzung der anderen Diagonalen eines Parallelogrammes ist gleich der Differenz der Quadrate über den in einer Ecke zusammenstofsenden Seiten desselben."

4) „Ist O ein beliebiger Punkt in der Ebene eines Dreiecks ABC, dann ist die Summe der Quadrate über den Seiten des Dreiecks gleich der dreifachen Summe der Quadrate über den Trägern seiner Eckpunkte, mit O als Beziehungspunkt, vermindert um das Quadrat über der dreifachen Trägerlänge des Schnittpunktes S seiner Transversalen durch die Ecken und die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks."

Sei $\overline{OA} = \alpha$, $\overline{OB} = \beta$, $\overline{OC} = \gamma$, $\overline{OS} = \zeta$. Dann ist

$$\alpha + \beta + \gamma = 3\zeta$$

folglich, indem wir die Seiten dieser Gleichung auf das innere Quadrat erheben,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha|\beta + \beta|\gamma + \gamma|\alpha) = 9\zeta^2. \qquad (1)$$

Ferner haben wir

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = (\beta - \alpha)^2 + (\gamma - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2$$
$$= 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2(\alpha|\beta + \beta|\gamma + \gamma|\alpha). \qquad (2)$$

Nun ergiebt sich aus (1) und (2)

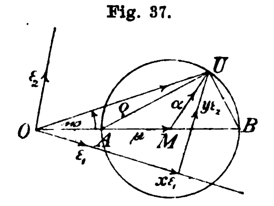
$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 9\zeta^2$$
$$= 3(\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2) - (3\overline{OS})^2,$$

womit der vorstehende Satz bewiesen ist.

§ 11. Die Kreislinie in der Ebene.

1) Streckengleichungen der Kreislinie. Sei M der Mittelpunkt eines Kreises, U ein beliebiger Punkt desselben, O ein willkürlich gewählter Punkt seiner Ebene, $U - M = \alpha$, $M - O = \mu$, $U - O = \varrho$ (Fig. 37).

Fig. 37.



Damit folgt aus dem Dreiecke der Punkte O, M und U

$$\varrho - \mu = \alpha.$$

Nun ist die Länge der Strecke α bei allen Lagen des Punktes U konstant, was wir auszudrücken haben, um zu einer Gleichung des Kreises zu gelangen. Deshalb erheben wir die beiden Seiten der letzten Gleichung auf ihr inneres Quadrat, was giebt

$$(\varrho - \mu)^{\text{ı}2} = \alpha^{\text{ı}2}, \tag{1}$$

oder, indem wir die Klammer auf der linken Seite dieser Gleichung lösen und das daraus hervorgehende Ergebnis etwas umformen,

$$\varrho^{\text{ı}2} - 2\mu|\varrho = \alpha^{\text{ı}2} - \mu^{\text{ı}2},$$

$$\varrho^{\text{ı}2} - 2\mu|\varrho = a^2 - m^2 = c^2, \tag{2}$$

womit eine Streckengleichung der Kreislinie gefunden ist.

Bezeichnen wir den von der Durchmesserlinie OM und dem Fahrstrahle $(U - O)$ eingeschlossenen variablen Winkel mit $\mathfrak{w}$, so erhalten wir, wenn wir in (2) von den Strecken zu den Zahlen übergehen,

$$r^2 - 2mr \cos \mathfrak{w} = c^2.$$

Das ist die sogenannte Polargleichung des Kreises mit einer Durchmesserlinie als Polaraxe, r als Fahrstrahllänge und $\mathfrak{w}$ als Polarwinkel.

Sei jetzt O Ursprung rechtwinkliger Koordinaten, deren Axen mit den Einheitsstrecken ε_1 und ε_2 gegen die Verbindungslinie der Punkte O und M beliebig geneigt sind, sei $\mu = m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2$, $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2$, $\varrho = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2$.

Die Substitution dieser Werte in die (1) giebt

$$[(x - m_1)\varepsilon_1 + (y - m_2)\varepsilon_2]^{\text{ı}2} = (a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2)^{\text{ı}2},$$

woraus folgt

$$(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = a_1^{\,2} + a_2^{\,2} = a^2,$$

oder

$$x^2 + y^2 - 2(m_1x + m_2y) = a^2 - (m_1^{\,2} + m_2^{\,2}) = a^2 - m^2, \tag{3}$$

so dafs wir haben

$$y = m_2 \pm \sqrt{a^2 - m_1(m_1 - 2x) - x^2}.$$

Dadurch erhalten wir als eine weitere Streckengleichung des Kreises

$$\varrho = x\varepsilon_1 + \sqrt{a^2 - m_1(m_1 - 2x) - x^2}\,\varepsilon_2. \qquad (4)$$

Fällt der Punkt O mit dem Punkte A des Kreises zusammen, dann ist $\mu^2 = \alpha^2$, was die Gleichungen giebt

$$\varrho^2 - 2\mu|\varrho = 0, \qquad (5)$$

$$r - 2m\cos\mathfrak{w} = 0, \quad x^2 + y^2 - 2(m_1 x + m_2 y) = 0.$$

Wenn der Punkt O mit dem Punkte M koinzidiert, dann ist $\mu = 0$, folglich

$$\varrho^2 = a^2$$

$$r = a, \quad x^2 + y^2 = a^2,$$

welche Gleichungen die sogenannten Mittelpunktsgleichungen des Kreises sind.

2) Die Durchmesserlinie OM schneidet die Kreislinie in den Punkten A und B, mit A als Pol ist auch, wegen (5),

$$\varrho|(\varrho - 2\mu) = 0,$$

aber es ist $\varrho - 2\mu = (U - A) - (B - A) = (U - B)$, daher ist

$$(U - A)|(U - B) = 0.$$

„Jeder Winkel im Halbkreise ist ein rechter Winkel.“

3) Sei die Gleichung eines Kreises

$$(\varrho - \mu)^2 = \alpha^2.$$

Irgend eine gerade Linie mit der Einheitsstrecke ε hat, wenn sie durch den Endpunkt von β geht und ω ihr Fahrstrahl ist, die Gleichung

$$\omega = \beta + u\varepsilon.$$

Für etwaige gemeinsame Punkte dieser Linie und des Kreises mufs $\omega = \varrho$, mithin

$$(\beta + u\varepsilon - \mu)^2 = \alpha^2$$

sein, aus welcher Bedingung folgt

$$u^2 - 2(\varepsilon|\mu - \varepsilon|\beta)u = \alpha^2 - \beta^2 - \mu^2 + 2\beta|\mu,$$

d. h.

$$u = \varepsilon|(\mu - \beta) \pm \sqrt{[\varepsilon|(\mu - \beta)]^2 + \alpha^2 - \beta^2 - \mu^2 + 2\beta|\mu}.$$

Substituieren wir diese Werte der Variablen u in die Gleichung der geraden Linie, so erhalten wir als Fahrstrahlen der Schnittpunkte

$$\omega_{1,2} = \beta + \{\varepsilon|(\mu - \beta) \pm \sqrt{[\varepsilon|(\mu - \beta)]^2 + \alpha^2 - \beta^2 - \mu^2 + 2\beta|\mu}\}\,\varepsilon,$$

es schneidet sonach im allgemeinen eine gerade Linie einen Kreis in zwei Punkten.

Mit $\beta = 0$ ergiebt sich

$$\omega_{1,2} = \{\varepsilon|\mu \pm \sqrt{\alpha^2 - (\varepsilon\mu)^2}\}\,\varepsilon,$$

denn es ist

$$(\varepsilon|\mu)^2 - \mu^2 = m^2 \cos^2(\varepsilon,\mu) - m^2 = - m^2 \sin^2(\varepsilon,\mu) = -(\varepsilon\mu)^2.$$

Nun ist

$$\omega_1|\omega_2 = (\varepsilon|\mu + \sqrt{\alpha^2 - (\varepsilon\mu)^2})(\varepsilon|\mu - \sqrt{\alpha^2 - (\varepsilon\mu)^2})\varepsilon|\varepsilon,$$

d. h.

$$\omega_1|\omega_2 = \mu^2 - \alpha^2 = k^2 = \text{einer Konstanten},$$

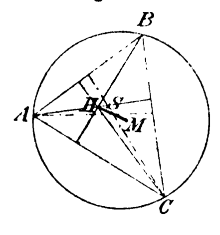
oder, wenn wir $\omega_1 = P_1 - O$, $\omega_2 = P_2 - O$ setzen,

$$\overline{OP}_1|\overline{OP}_2 = k^2.$$

„Nehmen wir auf einer, einen Kreis in den Punkten P_1 und P_2 schneidenden geraden Linie einen dritten Punkt O beliebig an, dann ist stets das Produkt aus den Längen der zwischen diesem Punkte und den Schnittpunkten liegenden Strecken von konstantem Werte, oder das Rechteck aus der einen und der Ergänzung der anderen Strecke von konstanter Fläche.“

4) Es soll die Beziehung zwischen dem Mittelpunkte S der Eckpunkte A, B und C eines beliebigen Dreiecks (Fig. 38), dem Schnittpunkte H seiner Höhenlinien und dem Mittelpunkte M des diesem Dreiecke umschriebenen Kreises aufgesucht werden.

Fig. 38.



Sind α, β, γ, ξ, η und ζ die Polstrecken der Punkte A, B, C, S, H und M resp., dann ist

$$\xi = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma), \tag{1}$$

$$(\alpha - \eta)|(\beta - \gamma) = 0, \tag{2}$$

$$(\beta - \zeta)^2 = (\gamma - \zeta)^2. \tag{3}$$

Durch Ausführung der inneren Multiplikation und Umformung des so sich ergebenden Resultates geht die (3) über in

$$(\beta + \gamma - 2\zeta)|(\beta - \gamma) = 0. \tag{4}$$

Nun ergiebt sich mit (2) und (4)

$$(\alpha + \beta + \gamma - \eta - 2\zeta)|(\beta - \gamma) = 0,$$

und wenn wir die (1) beachten, so wird

$$(3\xi - \eta - 2\zeta)|(\beta - \gamma) = 0.$$

Jetzt von der Ecke B, sodann von der Ecke C ausgehend, erhalten wir

$$(3\xi - \eta - 2\zeta)|(\gamma - \alpha) = 0,$$

$$(3\xi - \eta - 2\zeta)|(\alpha - \beta) = 0.$$

Die drei letzten Gleichungen können zusammen nur dann bestehen, wenn

$$3\xi - \eta - 2\zeta = 0$$

ist. In dieser Formel ist die Koeffizientensumme gleich Null, folglich liegen die Punkte S, H und M in gerader Linie. Wir erkennen aus ihr, resp. aus

$$\xi = \frac{\eta + 2\zeta}{3},$$

dafs der Punkt S die Strecke $(M - H)$ im Verhältnisse $2:1$ teilt und dem Punkte M zunächst liegt.

5) Die Gleichung der Berührungslinie eines Kreises. — Ist eine gerade Linie Tangente an einen Kreis, dann hat sie nur einen Punkt mit demselben gemeinsam, so dafs nach 3)

$$\omega_{1,2} = (\varepsilon|\mu)\varepsilon$$

ist. Nun haben wir

$$\omega|(\omega - \mu) = (\varepsilon|\mu)\varepsilon|[(\varepsilon|\mu)\varepsilon - \mu] = (\varepsilon|\mu)^2 - (\varepsilon|\mu)^2 = 0,$$

mithin ist die Berührungslinie senkrecht zu der Halbmesserstrecke des Berührungspunktes.

Nunmehr gehen wir der Einfachheit halber von der Mittelpunktgleichung des Kreises

$$\varrho^2 = a^2$$

aus, und es sei τ der Fahrstrahl eines beliebigen Punktes V der Tangente, dann ist

$$\alpha|(\tau - \alpha) = 0,$$

daher

$$\alpha|\tau = a^2, \quad \text{oder} \quad \varrho|\tau = a^2$$

die Gleichung der Berührungslinie, und es fällt die sogenannte Normale der Kurve mit dem Radius des Berührungspunktes zusammen.

Setzen wir $\varrho = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2$, $\tau = x_1\varepsilon_1 + y_1\varepsilon_2$, dann ist

$$(x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2)|(x_1\varepsilon_1 + y_1\varepsilon_2) = a^2,$$

woraus

$$xx_1 + yy_1 = a^2$$

als Gleichung der Tangente in Cartesischen Koordinaten folgt.

Für den Schnittpunkt der Berührungslinie und der Abscissenaxe ist

$$(x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2)|u\varepsilon_1 = a^2, \quad ux = a^2, \quad u = a^2 : x,$$

folglich ist der Fahrstrahl dieses Punktes

$$\tau = \frac{a^2}{x}\varepsilon_1.$$

6) Aus der Kreisgleichung

$$\varrho^2 - 2\mu|\varrho = a^2 - m^2$$

folgt

$$r = m \cos \mathfrak{w} \pm \sqrt{a^2 - m^2 \sin^2 \mathfrak{w}}.$$

Diese quadratische Gleichung hat zwei gleiche Wurzeln, wenn $\sin \mathfrak{w} = a : m$ ist, der Fahrstrahl ϱ wird dann zur Berührungslinie, und weil die Gleichung

$$r = m \cos \mathfrak{w} = m \cos (2\pi - \mathfrak{w})$$

besteht, so können von einem Punkte aufserhalb einer Kreislinie zwei Tangenten an dieselbe gezogen werden, die mit dem Strahle μ gleiche Winkel einschliefsen.

Sei T der Schnittpunkt der Tangenten in T_1 und T_2 (Fig. 39), $\overline{MT} = \beta$, $\overline{MT_1} = \varrho$, dann ist die Gleichung der Tangente TT_1

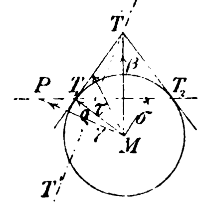


Fig. 39.

$$\varrho|\tau = a^2, \tag{1}$$

und weil diese Tangente durch den Punkt T geht, so ist auch

$$\varrho|\beta = a^2.$$

Denken wir uns nun ϱ variabel, $\varrho = \sigma$, dann besteht die Gleichung

$$\sigma|\beta = a^2, \tag{2}$$

welche diejenige einer zu β senkrechten geraden Linie ist. Denn ist σ der Fahrstrahl der durch den Endpunkt von γ gehenden und zu γ senkrechten geraden Linie mit dem Anfangselemente von γ als Beziehungspunkt, so ist ihre Gleichung

$$(\sigma - \gamma)|\gamma = 0, \quad \text{oder} \quad \sigma|\gamma = \gamma^2,$$

mithin ist auch

$$\sigma|n\gamma = n\gamma^2$$

und, wenn wir $n\gamma = \beta$, $n\gamma^2 = a^2$ setzen,

$$\sigma|\beta = a^2$$

die Gleichung einer zu β normalen geraden Linie.

Aber die Gleichung (1) genügt den beiden Berührungspunkten T_1 und T_2, daher fällt die durch (2) gegebene gerade Linie mit der Berührungssehne zusammen, so dafs (2) die Gleichung der Berührungssehne ist und letztere senkrecht auf der Verbindungslinie des Kreismittelpunktes und des Schnittpunktes der beiden Tangenten ist.

7) Durch einen festen Punkt P sei eine beliebige Sekante einer Kreislinie gezogen, welche mit der Kurve die Punkte T_1 und T_2

gemein hat, und es sei T der Schnittpunkt der Tangenten in diesen Punkten (Fig. 39). Der Kreismittelpunkt M sei Koordinatenursprung, ferner sei $\overline{MT} = \beta$, $\overline{MP} = \gamma$, σ Fahrstrahl der Berührungssehne, deren Gleichung

$$\sigma | \beta = a^2$$

somit ist. Weil die Berührungssehne durch den Punkt P geht, muſs

$$\gamma | \beta = a^2$$

sein. Dreht sich nun die Sekante um den Punkt P, dann wird β variabel und die letzte Gleichung stellt eine zu γ senkrechte gerade Linie dar, welche durch den Punkt T geht. Das führt zu dem Satze:

„Dreht sich eine Kreissekante um irgend einen fixen Punkt in ihr (den Pol), so beschreibt der Schnittpunkt der Tangenten in den gemeinsamen Punkten von Kreislinie und Sekante eine zu der Verbindungslinie des festen Punktes und des Kreiszentrums senkrechte gerade Linie (die Polare). Beschreibt der Schnittpunkt zweier Kreistangenten eine gerade Linie, dann dreht sich die Berührungssekante um einen festen Punkt in ihr, den Pol dieser geraden Linie, welcher der Schnittpunkt der Sekante und des durch den Mittelpunkt des Kreises gehenden, zu der ersten geraden Linie senkrechten Strahles ist."

Zweiter Abschnitt.

Die Multiplikation im Raume als System dritter Stufe.

§ 12. Produkte aus Strecken.

Als Einheit des Systemes wählen wir einen Würfel, von welchem die ursprünglichen Einheiten des Systemes ε_1, ε_2 und ε_3 in einer seiner Ecken zusammenstoſsende Kanten sind, wodurch wir das äuſsere Produkt

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 1$$

zu setzen haben.

Der Raum als System dritter Stufe enthält drei relative Einheiten, drei Einheiten zweiter Stufe $\varepsilon_1 \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 \varepsilon_3$ und $\varepsilon_3 \varepsilon_1$ und die Einheit dritter Stufe, die des Systemes, auſserdem keine weitere Einheit. Dabei können irgend drei wechselseitig zu einander normale Strecken von gleichen Längen als ursprüngliche Einheiten gewählt werden.

Sei

$$\alpha = \sum_{k=1}^{k=3} a_k \varepsilon_k, \quad \beta = \sum_{k=1}^{k=3} b_k \varepsilon_k, \ldots.$$

dann ist

$$\alpha\beta = (a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3)(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3)$$
$$= (a_1b_2 - a_2b_1)\varepsilon_1\varepsilon_2 + (a_2b_3 - a_3b_2)\varepsilon_2\varepsilon_3 + (a_3b_1 - a_1b_3)\varepsilon_3\varepsilon_1,$$
$$\alpha\beta\gamma = (\alpha\beta)\gamma$$
$$= \{(a_1b_2 - a_2b_1)c_3 + (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2\}\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$$
$$= \Delta\,\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = \Delta,$$
$$\alpha\beta\gamma\delta = \Delta(d_1\varepsilon_1 + d_2\varepsilon_2 + d_3\varepsilon_3),$$

. . . .

. . . .

Das Produkt aus zwei Strecken ist eine Vielfachensumme der Einheiten zweiter Stufe, dasjenige aus drei Strecken ein Vielfaches der Einheit des Systemes, dasjenige aus vier Strecken eine Strecke, ein Vielfaches des letzten Faktors, eine Vielfachensumme aus den relativen Einheiten, dasjenige aus fünf Strecken wieder eine Gröfse zweiter Stufe u. s. f.

Den Koeffizienten Δ eines Produktes aus drei Strecken nennen wir die Determinante dieses Produktes, verschwindet sie, so sind die Faktoren einer Ebene parallel. Alle dreifaktorigen Streckenprodukte sind auch jetzt noch gleichartige Gröfsen, denn sie sind Zahlen äquivalent.

§ 13. Einführung des Begriffes der Ergänzung.

Ist die relative Einheit ε_1 gegeben, so haben wir dieselbe mit der Einheit $(\varepsilon_2\varepsilon_3)$ äufserlich zu multiplizieren, damit die Einheit dritter Stufe entsteht, weshalb wir sagen, es sei die Ergänzung von ε_1 gleich dem äufseren Produkte $(\varepsilon_2\varepsilon_3)$ und schreiben

$$|\varepsilon_1 = \varepsilon_2\varepsilon_3, \quad \text{weil} \quad \varepsilon_1(\varepsilon_2\varepsilon_3) = 1 \text{ ist},$$
$$|\varepsilon_2 = \varepsilon_3\varepsilon_1, \quad \text{„} \quad \varepsilon_2(\varepsilon_3\varepsilon_1) = 1 \text{ „}$$
$$|\varepsilon_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2, \quad \text{„} \quad \varepsilon_3(\varepsilon_1\varepsilon_2) = 1 \text{ „}$$

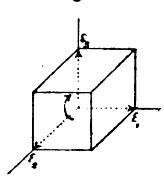
Umgekehrt haben wir

$$|(\varepsilon_2\varepsilon_3) = \varepsilon_1, \quad \text{weil} \quad (\varepsilon_2\varepsilon_3)\varepsilon_1 = 1 \text{ ist},$$
$$|(\varepsilon_3\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \quad \text{„} \quad (\varepsilon_3\varepsilon_1)\varepsilon_2 = 1 \text{ „}$$
$$|(\varepsilon_1\varepsilon_2) = \varepsilon_3, \quad \text{„} \quad (\varepsilon_1\varepsilon_2)\varepsilon_3 = 1 \text{ „}$$

Beziehen wir diese Ergebnisse auf den Einheitswürfel (Fig. 40), dann folgt:

Die Ergänzung einer ursprünglichen Einheit ist äquivalent der zu ihr normalen Flächeneinheit, und die Ergänzung eines Einheitsfeldes ist äquivalent der zu ihr senkrechten Einheit erster Stufe.

Fig. 40.



Weiter erhalten wir

$$|(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 1.$$

Die Ergänzung der Einheit des Systemes ist dieser gleich, eventuell gleich der absoluten Einheit.

Die Stufenzahl der Ergänzung einer Einheit ist gleich dem Unterschiede der Stufenzahlen des Hauptgebietes und dieser Einheit.

Weil

$$\varepsilon_1(\varepsilon_2 \varepsilon_3) = 1, \quad \varepsilon_2(\varepsilon_3 \varepsilon_1) = 1, \quad \varepsilon_3(\varepsilon_1 \varepsilon_2) = 1$$

ist, so haben wir

$$\varepsilon_1 | \varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 | \varepsilon_2 = 1, \quad \varepsilon_3 | \varepsilon_3 = 1,$$

oder

$$\varepsilon_1{}^{\underline{2}} = \varepsilon_2{}^{\underline{2}} = \varepsilon_3{}^{\underline{2}} = 1.$$

Weil

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2)\varepsilon_3 = 1, \quad (\varepsilon_2 \varepsilon_3)\varepsilon_1 = 1, \quad (\varepsilon_3 \varepsilon_1)\varepsilon_2 = 1$$

ist, ziehen wir die Resultate

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2)|(\varepsilon_1 \varepsilon_2) = 1, \quad (\varepsilon_2 \varepsilon_3)|(\varepsilon_2 \varepsilon_3) = 1, \quad (\varepsilon_3 \varepsilon_1)|(\varepsilon_3 \varepsilon_1) = 1,$$

oder

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^{\underline{2}} = (\varepsilon_2 \varepsilon_3)^{\underline{2}} = (\varepsilon_3 \varepsilon_1)^{\underline{2}} = 1.$$

Weil

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3) = |(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3) = 1$$

ist, so ergiebt sich

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^{\underline{2}} = 1.$$

Das innere Quadrat einer jeden Einheit ist gleich der Einheit des Systemes, gleich der absoluten Einheit.

Wir haben

$$|\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \varepsilon_3, \quad |(\varepsilon_2 \varepsilon_3) = \varepsilon_1,$$

folglich ist

$$|^2\varepsilon_1 = |(\varepsilon_2 \varepsilon_3) = \varepsilon_1, \quad |^2(\varepsilon_2 \varepsilon_3) = |\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \varepsilon_3,$$
$$|^3\varepsilon_1 = |\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \varepsilon_3, \quad |^3(\varepsilon_2 \varepsilon_3) = |(\varepsilon_2 \varepsilon_3) = \varepsilon_1,$$
$$|^4\varepsilon_1 = |(\varepsilon_2 \varepsilon_3) = \varepsilon_1, \quad |^4(\varepsilon_2 \varepsilon_3) = |\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \varepsilon_3,$$

noch ist

$$|^n(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3) = |^n 1 = 1.$$

Die doppelte Ergänzung jeder Einheit ist dieser Einheit gleich, ebenso die vierfache Ergänzung. Dagegen ist die dreifache Ergänzung einer relativen Einheit äquivalent dem zu ihr senkrechten Einheitsfelde, die dreifache Ergänzung eines Einheitsfeldes der zu ihm normalen Einheitsstrecke gleich, und die dreifache Ergänzung der Einheit des Systemes ist ihr selbst äquivalent. Die $n$fache Ergänzung der Einheit des Systemes, unter n irgend eine ganze positive Zahl verstanden, ist gleich dieser Einheit.

Im Raume als System dritter Stufe operiert mithin der Ergänzungsstrich als ein Verwandlungsfaktor, wohingegen er in der Ebene als System zweiter Stufe ein Schwenkungsfaktor ist.

Sei die Strecke

$$\alpha = a\varepsilon_1,$$

dann ist, weil der Ergänzungsstrich nur an einer geometrischen Gröfse operiert,

$$|\alpha = |(a\varepsilon_1) = a|\varepsilon_1 = a(\varepsilon_2\varepsilon_3) = \mathfrak{A},$$

wenn wir das $a$fache eines Einheitsfeldes mit $\mathfrak{A}$ bezeichnen, und weil wir irgend drei zu einander senkrechte Strecken von gleichen Längen als die ursprünglichen Einheiten des Systemes wählen können, so folgt der Satz:

Die Ergänzung einer beliebigen Strecke ist ein zu ihr senkrechtes Feld, dessen Flächenzahl gleich der Längenzahl der Strecke ist und dessen Entstehungssinn vom Endelemente der Strecke aus gesehen positiv erscheint.

Ist die Strecke α eine Vielfachensumme aller relativen Einheiten, ist

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3,$$

dann haben wir infolge der Eigenschaft des Ergänzungsfaktors

$$|\alpha = |(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3)$$
$$= a_1|\varepsilon_1 + a_2|\varepsilon_2 + a_3|\varepsilon_3,$$
$$|\alpha = a_1(\varepsilon_2\varepsilon_3) + a_2(\varepsilon_3\varepsilon_1) + a_3(\varepsilon_1\varepsilon_2) = \mathfrak{A},$$

womit die Ergänzung einer Strecke als eine Vielfachensumme der Einheiten zweiter Stufe dargestellt erscheint und sich zeigt, dafs diese Vervielfachensumme einem Felde äquivalent ist.

Ist umgekehrt das Feld

$$\mathfrak{A} = a(\varepsilon_2\varepsilon_3),$$

dann ist

$$|\mathfrak{A} = a|(\varepsilon_2\varepsilon_3) = a\varepsilon_1 = \alpha.$$

Die Ergänzung eines Feldes ist äquivalent einer zu ihr senkrechten Strecke, die Längenzahl der letzteren ist gleich der Flächenzahl des Feldes und von ihrem Endelemente aus erscheint das Feld im positiven Sinne entstanden.

Setzen wir

$$\mathfrak{A} = a_1(\varepsilon_2\varepsilon_3) + a_2(\varepsilon_3\varepsilon_1) + a_3(\varepsilon_1\varepsilon_2),$$

so ergiebt sich

$$|\mathfrak{A} = a_1|(\varepsilon_2\varepsilon_3) + a_2|(\varepsilon_3\varepsilon_1) + a_3|(\varepsilon_1\varepsilon_2),$$

$$|\mathfrak{A} = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3,$$

die Ergänzung eines beliebigen Feldes als eine Vielfachensumme der ursprünglichen Einheiten.

Weil die Gleichungen bestehen

$$|\alpha = \mathfrak{A}, \quad |\mathfrak{A} = \alpha,$$

so haben wir

$$|^2\alpha = |\mathfrak{A} = \alpha, \quad |^2\mathfrak{A} = |\alpha = \mathfrak{A},$$

$$|^3\alpha = |\alpha = \mathfrak{A}, \quad |^3\mathfrak{A} = |\mathfrak{A} = \alpha,$$

$$|^4\alpha = |\mathfrak{A} = \alpha, \quad |^4\mathfrak{A} = |\alpha = \mathfrak{A}.$$

Mithin gelten die oben für Einheiten erster und zweiter Stufe ausgesprochenen Sätze auch für beliebige Strecken und beliebige Felder.

Durch die Eigenschaft der Ergänzung sind wir in der Lage, beliebige Felder in höchst einfacher Weise zu addieren.

Setzen wir nämlich

$$\mathfrak{A}_1 = |\alpha_1, \quad \mathfrak{A}_2 = |\alpha_2, \ldots \quad \mathfrak{A}_n = |\alpha_n,$$

dann ist

$$\sum_{k=1}^{k=n}\mathfrak{A}_k = \sum_{k=1}^{k=n}|\alpha_k = |\sum_{k=1}^{k=n}\alpha_k = |\alpha = \mathfrak{A}.$$

Eine Summe von Feldern ist wieder ein Feld, dasselbe ist gleich der Ergänzung der Summe der Ergänzungsstrecken der zu addierenden Felder. Der Ort des Summenfeldes ist willkürlich, nur seine Stellung, seine Gröfse und sein Entstehungssinn sind eindeutig bestimmt. Schliefst sich das Summationspolygon der Ergänzungsstrecken, dann verschwindet das Summenfeld.

Die Unbestimmtheit des Ortes des Summenfeldes liegt darin, dafs die Gleichheit der Strecken nur durch deren Richtung, ihren Richtungssinn und ihre Gröfse bedingt ist, wodurch Felder in parallelen Ebenen zu gleichartigen Gröfsen werden.

Es ist, wenn wir $\alpha = a\varepsilon_1$, $\mathfrak{A} = a(\varepsilon_2\varepsilon_3)$ setzen,

$$\alpha|\alpha = (a\varepsilon_1)|(a\varepsilon_1) = a^2\varepsilon_1|\varepsilon_1 = a^2,$$

also

$$\alpha^2 = a^2, \qquad a = \sqrt{\alpha^2},$$

$$\mathfrak{A}|\mathfrak{A} = a(\varepsilon_2\varepsilon_3)|[a(\varepsilon_2\varepsilon_3)] = a^2(\varepsilon_2\varepsilon_3)|(\varepsilon_2\varepsilon_3) = a^2$$

also

$$\mathfrak{A}^2 = a^2, \qquad a = \sqrt{\mathfrak{A}^2} = \sqrt{\alpha^2}.$$

Ferner haben wir

$$\alpha|\varepsilon_1 = a\varepsilon_1|\varepsilon_1 = a,$$

mithin auch

$$a = \alpha|\varepsilon_1.$$

Weiter ist

$$a\varepsilon_1 = \alpha = |\mathfrak{A}, \quad a|\varepsilon_1 = \mathfrak{A},$$

woraus folgt, wenn wir die Seiten der letzten Gleichung mit ε_1 multiplizieren,

$$a = \varepsilon_1\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\varepsilon_1,$$

denn mit $\mathfrak{A} = (\alpha\beta)$ ist $\varepsilon_1(\alpha\beta) = (\alpha\beta)\varepsilon_1$.

Die Längenzahl einer beliebigen Strecke ist gleich der Quadratwurzel aus ihrem inneren Quadrate, gleich dem Produkte aus ihr und der Ergänzung ihrer Einheitsstrecke. Die Flächenzahl eines beliebigen Feldes ist gleich der Quadratwurzel aus seinem inneren Quadrate, gleich derjenigen aus dem inneren Quadrate seiner Ergänzungsstrecke, gleich dem äufseren Produkte aus ihm und seiner Stellungsstrecke.

Eine zu einer Ebene senkrechte Strecke von der Länge Eins und von deren Endelement aus gesehen die Ebene positiven Entstehungssinn zeigt, nennen wir nämlich die Stellungsstrecke dieser Ebene, denn durch eine solche Strecke ist die Neigung und der Entstehungssinn der Ebene vollständig bestimmt.

§ 14. Das innere Produkt aus zwei Strecken und dasjenige aus zwei Feldern.

Das äufsere Produkt aus einer Gröfse und der Ergänzung einer anderen Gröfse heifst das innere Produkt aus diesen Gröfsen.

Wir dürfen setzen

$$\alpha|\beta = \alpha\mathfrak{B}, \quad \text{mit} \quad |\beta = \mathfrak{B},$$

$$\mathfrak{A}|\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\beta, \quad \text{mit} \quad |\mathfrak{B} = \beta.$$

Damit ist die Multiplikation auf die äufsere zurückgeführt worden.

Der Wert eines jeden dieser Produkte ist einer Gröſse dritter Stufe, resp. einer Zahl gleich, denn die Summe der Stufenzahlen ihrer Faktoren ist der Stufenzahl des Hauptgebietes gleich.

Indem wir setzen

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3 = |\mathfrak{A}, \quad \beta = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3 = |\mathfrak{B},$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \alpha|\beta &= (a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3)(b_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + b_2\varepsilon_3\varepsilon_1 + b_3\varepsilon_1\varepsilon_2) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \\ \beta|\alpha &= (b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3)(a_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + a_2\varepsilon_3\varepsilon_1 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \\ \mathfrak{A}|\mathfrak{B} &= (a_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + a_2\varepsilon_3\varepsilon_1 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2)(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \\ \mathfrak{B}|\mathfrak{A} &= (b_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + b_2\varepsilon_3\varepsilon_1 + b_3\varepsilon_1\varepsilon_2)(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \end{aligned}$$

folglich ist

$$\alpha|\beta = \beta|\alpha, \quad \mathfrak{A}|\mathfrak{B} = \mathfrak{B}|\mathfrak{A}.$$

Nehmen wir $\alpha = a\varepsilon_1$, was der Allgemeinheit keinen Eintrag thut, so ergiebt sich, indem b die Länge von β ist,

$$\alpha|\beta = a\varepsilon_1|(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3) = ab_1 = ab\,\frac{b_1}{b},$$

mithin ist, weil $(b_1 : b) = \cos(\alpha, \beta)$ ist,

$$\alpha|\beta = ab\cos(\alpha, \beta).$$

Ferner haben wir

$$\mathfrak{A}|\mathfrak{B} = a(\varepsilon_2\varepsilon_3)(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3) = ab_1 = ab\,\frac{b_1}{b},$$

daher ist

$$\mathfrak{A}|\mathfrak{B} = ab\cos(\alpha, \beta) = ab\cos(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}),$$

denn da die Strecken α und β zu den Feldern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ resp. senkrecht sind, so schlieſsen sie einen Winkel ein, welcher gleich demjenigen ist, den diese Felder, resp. deren Ebenen miteinander bilden.

Die beiden inneren Produkte verschwinden, wenn $\cos(\alpha, \beta) = 0$ ist, wenn also α und β normal zu einander sind.

Die Faktoren eines inneren Produktes aus zwei Strecken und desjenigen aus zwei Feldern sind ohne Zeichenwechsel vertauschbar, und es verschwinden die Werte dieser Produkte, wenn ihre Faktoren aufeinander senkrecht stehen.

§ 15. Der Zahlwert des äuſseren Produktes aus drei Strecken.

Nunmehr erhalten wir für das äuſsere Produkt aus drei Strecken α, β und γ, wenn wir $(\beta\gamma) = |\delta$ setzen,

$$\alpha\beta\gamma = \alpha(\beta\gamma) = \alpha|\delta = ad \cos(\alpha, \delta),$$

aber es ist

$$d = \sqrt{(\beta\gamma)^2} = bc \sin(\beta, \gamma),$$

folglich

$$\alpha\beta\gamma = abc \sin(\beta, \gamma) \cos(\alpha, \delta).$$

Führen wir jetzt den Winkel $\left\{\frac{1}{2}\pi - (\alpha, \delta)\right\} = \mathfrak{b}$ ein, setzen $\sphericalangle(\beta, \gamma) = \mathfrak{a}$, bedenken, dafs mit $h = a \sin \mathfrak{b}$ die Gröfse h die Längenzahl der zu der Grundfläche $(\beta\gamma)$ gehörenden Höhenlinie des Spathes $(\alpha\beta\gamma)$ ist, so ergiebt sich

$$\alpha\beta\gamma = abc \sin \mathfrak{a} \sin \mathfrak{b} = bch \sin \mathfrak{a},$$

womit ein bekannter Satz der Stereometrie zum Ausdruck gekommen ist.

§ 16. Das äufsere Produkt aus Einheiten beliebiger Stufe.

Das äufsere Produkt aus zwei ungleichen Einheiten erster Stufe giebt eine Einheit zweiter Stufe, dasjenige aus einer relativen Einheit und ihr selbst verschwindet.

Wir haben

$$\varepsilon_1(\varepsilon_2\varepsilon_3) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1, \quad (\varepsilon_1\varepsilon_2)\varepsilon_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1,$$
$$\varepsilon_1(\varepsilon_1\varepsilon_2) = \varepsilon_1\varepsilon_1\varepsilon_2 = 0, \quad (\varepsilon_1\varepsilon_2)\varepsilon_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_2 = 0,$$

es ist das äufsere Produkt aus einer der Einheitsstrecken und dem zu ihr senkrechten Einheitsfelde der Einheit des Systemes, der absoluten Einheit äquivalent, ebenso verhält es sich mit dem äufseren Produkte aus einem Einheitsfelde und der zu ihr normalen Streckeneinheit, dahingegen verschwindet das äufsere Produkt, wenn der eine Einheitsfaktor in dem anderen liegt, oder zu ihm parallel ist.

Jetzt handelt es sich nur noch um das äufsere Produkt aus zwei Einheitsfeldern.

Das äufsere Produkt aus beliebig vielen ungleichartigen Einheiten erster Stufe ist wieder eine Einheit, deren Stufenzahl gleich der Anzahl der Faktoren ist. Die Stufenzahl des Produktes aus beliebig vielen ungleichartigen Gröfsen ersten Grades (Strecken) ist gleich dem verbleibenden Reste, wenn wir die Summe der Stufenzahlen seiner Faktoren, welche mit der Anzahl der Faktoren übereinstimmt, durch die Stufenzahl des Hauptgebietes dividieren. Damit mufs die Stufenzahl des äufseren Produktes aus Einheiten beliebiger Stufe im Einklang sein, es mufs das Ergebnis der Umformung eines solches Produktes seine sämtlichen Elementarfaktoren enthalten, und alle Gesetze der äufseren Multiplikation müssen stets gelten.

Betrachten wir nun das äufsere Produkt aus den beiden Einheitsfeldern $(\varepsilon_1 \varepsilon_2)$ und $(\varepsilon_2 \varepsilon_3)$, welche in der Strecke ε_2 ein gemeinsames Element besitzen.

Weil die Summe der Stufenzahlen der Elementarfaktoren dieses Produktes gleich vier ist, so verbleibt als Rest Eins, wenn wir diese Summe durch drei teilen, daher mufs das Ergebnis eine Strecke sein, wodurch wir, wenn wir diese noch unbekannte Strecke mit ε bezeichnen, die Gleichung erhalten

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2)(\varepsilon_2 \varepsilon_3) = \varepsilon. \tag{1}$$

Nun giebt die Multiplikation dieser Gleichung mit ε_2

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2)(\varepsilon_2 \varepsilon_3)\varepsilon_2 = \varepsilon\varepsilon_2, \quad \varepsilon_2(\varepsilon_1 \varepsilon_2)(\varepsilon_2 \varepsilon_3) = \varepsilon_2\varepsilon, \tag{2}$$

aber es ist

$$(\varepsilon_2 \varepsilon_3)\varepsilon_2 = \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_2(\varepsilon_1 \varepsilon_2) = \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0,$$

folglich verschwinden auch die rechten Seiten der Gleichungen (2), wodurch die Bedingung auftritt

$$\varepsilon_2 \varepsilon = 0.$$

Dieser Forderung allein wird genügt, wenn ε irgend ein Vielfaches von ε_2 ist, wenn

$$\varepsilon = m\varepsilon_2.$$

Weil jedoch das Ergebnis eine Einheit erster Stufe und positiv sein mufs, denn die Faktoren des in Rede stehenden Produktes sind positiv, überdies im ersteren sämtliche Elementarfaktoren vorkommen müssen, so kann nur

$$m = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3) = 1$$

sein, und es ergiebt sich mithin

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2)(\varepsilon_2 \varepsilon_3) = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)\varepsilon_2 = \varepsilon_2. \tag{3}$$

Zu demselben Resultate gelangen wir, wenn wir die Gleichung (1) mit $(\varepsilon_1 \varepsilon_2)$ oder mit $(\varepsilon_2 \varepsilon_3)$ multiplizieren.

Das äufsere Produkt aus zwei Einheitsfeldern des Systemes ist äquivalent der ihnen gemeinsamen Einheitsstrecke, einer Einheit erster Stufe, äquivalent dem Produkte aus der Einheit des Systemes und ihrem gemeinsamen Elemente.

Noch haben wir

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2)(\varepsilon_2 \varepsilon_3) = (|\varepsilon_3|\varepsilon_1),$$
$$\varepsilon_2 = |(\varepsilon_3 \varepsilon_1),$$

daher besteht mit Rücksicht auf (3) die Beziehung

$$|\varepsilon_3|\varepsilon_1 = |(\varepsilon_3 \varepsilon_1). \tag{4}$$

Das äuſsere Produkt aus den Ergänzungen zweier ursprünglichen Einheiten ist gleich der Ergänzung des äuſseren Produktes aus diesen Einheiten.

Nehmen wir auf beiden Seiten der Gleichung (4) die Ergänzungen, so ergiebt sich

$$|(|\varepsilon_3|\varepsilon_1) = |^2(\varepsilon_3\varepsilon_1) = \varepsilon_3\varepsilon_1,$$

und umgekehrt ist

$$(\varepsilon_3\varepsilon_1) = |(|\varepsilon_3|\varepsilon_1).$$

Das äuſsere Produkt aus zwei ursprünglichen Einheiten ist gleich der Ergänzung des äuſseren Produktes aus den Ergänzungen dieser Einheiten.

Hieraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned}|[(\varepsilon_1\varepsilon_2)(\varepsilon_2\varepsilon_3)] &= |[|\varepsilon_3|\varepsilon_1] = \varepsilon_3\varepsilon_1 \\ &= |(\varepsilon_1\varepsilon_2)|(\varepsilon_2\varepsilon_3).\end{aligned}$$

Die Ergänzung des äuſseren Produktes aus zwei Einheiten zweiter Stufe ist gleich dem äuſseren Produkte aus den Ergänzungen dieser Einheiten.

Weiter haben wir

$$\begin{aligned}|[\varepsilon_1(\varepsilon_2\varepsilon_3)] &= |[|(\varepsilon_2\varepsilon_3)|\varepsilon_1] = |[|(\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_1)] = |^2(\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_1) = (\varepsilon_2\varepsilon_3)\varepsilon_1 \\ &= |\varepsilon_1|(\varepsilon_2\varepsilon_3).\end{aligned}$$

Mithin gilt allgemein der Satz:

Die Ergänzung des äuſseren Produktes aus zwei beliebigen Einheiten ist gleich dem äuſseren Produkte aus den Ergänzungen dieser Einheiten.

Durch den eben ausgesprochenen Fundamentalsatz erhalten wir nun

$$\begin{aligned}(\varepsilon_1\varepsilon_2)(\varepsilon_2\varepsilon_3) &= |\varepsilon_3|\varepsilon_1 = |(\varepsilon_3\varepsilon_1) = \varepsilon_2 = (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)\varepsilon_2, \\ (\varepsilon_2\varepsilon_3)(\varepsilon_3\varepsilon_1) &= |\varepsilon_1|\varepsilon_2 = |(\varepsilon_1\varepsilon_2) = \varepsilon_3 = (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)\varepsilon_3, \\ (\varepsilon_3\varepsilon_1)(\varepsilon_1\varepsilon_2) &= |\varepsilon_2|\varepsilon_3 = |(\varepsilon_2\varepsilon_3) = \varepsilon_1 = (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)\varepsilon_1.\end{aligned}$$

§ 17. Die Ergänzung des äuſseren Produktes aus zwei beliebigen Strecken.

Nehmen wir

$$\alpha = \sum_{k=1}^{k=3} a_k\varepsilon_k, \quad \beta = \sum_{k=1}^{k=3} b_k\varepsilon_k,$$

so erhalten wir

$$\alpha\beta = \sum_{k=1}^{k=3} a_k \varepsilon_k \sum_{k=1}^{k=3} b_k \varepsilon_k$$
$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1)\varepsilon_1\varepsilon_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\varepsilon_2\varepsilon_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\varepsilon_3\varepsilon_1,$$
$$|(\alpha\beta) = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\varepsilon_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\varepsilon_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\varepsilon_2,$$
$$|\alpha|\beta = (a_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + a_2\varepsilon_3\varepsilon_1 + a_3\varepsilon_1\varepsilon_2)(b_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + b_2\varepsilon_3\varepsilon_1 + b_3\varepsilon_1\varepsilon_2),$$

und es giebt die Ausführung der Multiplikation auf der rechten Seite dieser Gleichung unter Beachtung der Werte der Produkte aus zwei Einheiten zweiter Stufe

$$|\alpha|\beta = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\varepsilon_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\varepsilon_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\varepsilon_2,$$

folglich ist

$$|(\alpha\beta) = |\alpha|\beta.$$

Die Ergänzung des äufseren Produktes aus zwei beliebigen Strecken ist gleich dem äufseren Produkte aus den Ergänzungen dieser Strecken.

§ 18. Das äufsere Produkt aus Feldern.

Setzen wir in der Gleichung

$$(\varepsilon_1\varepsilon_2)(\varepsilon_2\varepsilon_3) = (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)\varepsilon_2 \tag{1}$$

an die Stelle von ε_1 auf ihrer linken Seite die Strecke

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3,$$

so erhalten wir

$$[(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3)\varepsilon_2](\varepsilon_2\varepsilon_3) = (a_1\varepsilon_1\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3\varepsilon_2)(\varepsilon_2\varepsilon_3) = a_1(\varepsilon_1\varepsilon_2)(\varepsilon_2\varepsilon_3)$$
$$= a_1(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)\varepsilon_2 = (a_1\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)\varepsilon_2$$
$$= [(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3)\varepsilon_2\varepsilon_3]\varepsilon_2,$$

folglich ist

$$(\alpha\varepsilon_2)(\varepsilon_2\varepsilon_3) = (\alpha\varepsilon_2\varepsilon_3)\varepsilon_2,$$

und entsprechende Relationen ergeben sich, wenn wir nach einander jede der beiden anderen ursprünglichen Einheiten in (1) durch beliebige Strecken ersetzen, wodurch wir schliefsen, dafs

$$(\alpha\beta)(\beta\gamma) = (\alpha\beta\gamma)\beta$$

ist, die für Einheitsprodukte bestehenden Sätze auch Gültigkeit haben, wenn an die Stelle der relativen Einheiten beliebige Strecken treten.

Bedenken wir, dafs ein Feld seinen Wert nicht ändert, wenn es beliebig in seiner Ebene verschoben wird, dafs es in ein ihm äquivalentes Feld von gegebener Seite verwandelt werden kann, so erhalten wir für das äufsere Produkt aus den Feldern $(\alpha\beta)$ und $(\gamma\delta)$, welche

ungleichartigen Ebenen angehören, wenn ζ eine zur Schnittlinie beider Ebenen parallele Strecke ist und wir $\alpha\beta = \alpha_1\zeta$, $\gamma\delta = \zeta\delta_1$ setzen,

$$(\alpha\beta)(\gamma\delta) = (\alpha_1\zeta)(\zeta\delta_1) = (\alpha_1\zeta\delta_1)\zeta.$$

Das äufsere Produkt aus zwei ungleichartigen Feldern ist äquivalent einer zu der Schnittlinie ihrer Ebenen parallelen Strecke.

Setzen wir $(\alpha\beta) = |\zeta$, $(\gamma\delta) = |\eta$, dann ergiebt sich

$$(\alpha\beta)(\gamma\delta) = |\zeta|\eta = |(\zeta\eta) = -|(\eta\zeta) = -|\eta|\zeta = -(\gamma\delta)(\alpha\beta).$$

Die Faktoren des äufseren Produktes aus zwei Feldern sind nur mit Zeichenwechsel vertauschbar.

Weil ζ und η zu den Ebenen von $(\alpha\beta)$ und $(\gamma\delta)$ normal sind, so ist $|(\zeta\eta)$ eine zu der Schnittlinie dieser Ebenen parallele Strecke, woraus wieder der vorige Satz folgt.

Sind die beiden Felder einer Ebene parallel, dann ist $\eta = m\zeta$ und damit

$$(\alpha\beta)(\gamma\delta) = |\zeta|m\zeta = m|(\zeta\zeta) = 0.$$

Das äufsere Produkt aus zwei parallelen Feldern verschwindet.

Mit $(\alpha\beta) = |\zeta$, $(\gamma\delta) = |\eta$, $(\lambda\mu) = |\vartheta$ ergiebt sich

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)[(\gamma\delta) + (\lambda\mu)] &= |\zeta[|\eta + |\vartheta] = |\zeta|[\eta + \vartheta] = |[\zeta(\eta + \vartheta)]\\ &= |[\zeta\eta + \zeta\vartheta] = |(\zeta\eta) + |(\zeta\vartheta) = |\zeta|\eta + |\zeta|\vartheta\\ &= (\alpha\beta)(\gamma\delta) + (\alpha\beta)(\lambda\mu),\end{aligned}$$

womit das Distributivitätsgesetz für die äufsere Multiplikation von Feldern vor uns steht.

Wir haben

$$(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\alpha\delta) = -[(\beta\alpha)(\alpha\gamma)](\alpha\delta) = -(\beta\alpha\gamma)\alpha(\alpha\delta) = (\alpha\beta\gamma)(\alpha\alpha\delta) = 0.$$

Das äufsere Produkt aus drei Feldern, welche eine gemeinsame Seite haben, oder deren Ebenen sich in einer Geraden schneiden, verschwindet.

§ 19. **Das innere Produkt aus zwei Feldern.**

Indem wir die Bezeichnungen in § 18 beibehalten, dürfen wir successive setzen

$$(\alpha\beta)|(\gamma\delta) = (\alpha\beta)\eta = \eta(\alpha\beta) = \eta|\zeta = \zeta|\eta = \zeta\gamma\delta = (\gamma\delta)\zeta,$$

mithin ist

$$(\alpha\beta)|(\gamma\delta) = (\gamma\delta)|(\alpha\beta).$$

Sind die beiden Felder zu einander senkrecht, dann sind auch η

und ζ normal zu einander, was bewirkt, dafs dann $\eta|\zeta = 0$ ist, womit das Produkt der Felder verschwindet.

Die Faktoren des inneren Produktes aus zwei Feldern sind ohne Zeichenwechsel vertauschbar, dasselbe verschwindet, wenn die Faktoren aufeinander senkrecht stehen.

Nehmen wir

$$\alpha = \sum_{k=1}^{k=3} a_k \varepsilon_k, \quad \beta = \sum_{k=1}^{k=3} b_k \varepsilon_k, \ldots,$$

dann wird

$$(\alpha\beta)|(\gamma\delta) = \left[\sum_{k=1}^{k=3} a_k \varepsilon_k \sum_{k=1}^{k=3} b_k \varepsilon_k\right] \Big| \left[\sum_{k=1}^{k=3} c_k \varepsilon_k \sum_{k=1}^{k=3} d_k \varepsilon_k\right],$$

und die Ausführung der Multiplikation auf der rechten Seite dieser Gleichung giebt, wenn wir gehörig ordnen,

$$(\alpha\beta)|(\gamma\delta) = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)(b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3)$$
$$- (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)(a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3),$$

mithin ist

$$(\alpha\beta)|(\gamma\delta) = (\alpha|\gamma)(\beta|\delta) - (\beta|\gamma)(\alpha|\delta),$$

oder

$$(\alpha\beta)|(\gamma\delta) = \begin{vmatrix} \alpha|\gamma & \beta|\gamma \\ \alpha|\delta & \beta|\delta \end{vmatrix},$$

und es verschwindet das Produkt aus den Feldern, wenn die vorstehende Determinante gleich Null ist.

§ 20. Ableitung der für die Streckenrechnung wichtigsten Formeln.

1) Der Ausdruck $(\alpha|\beta|\gamma)$ bedeutet ein Feld, denn die Summe der Stufenzahlen seiner Faktoren ist gleich fünf. Mit $|(\beta\gamma) = \delta$ erhalten wir

$$(\alpha|\beta|\gamma) = [\alpha|(\beta\gamma)] = \alpha\delta.$$

2) Der Ausdruck $(|\alpha|\beta|\gamma)$ bedeutet, weil die Summe der Stufenzahlen seiner Faktoren gleich sechs ist, ein Vielfaches der Einheit des Systemes. Nehmen wir $|(\alpha\beta) = \zeta$, so ergiebt sich

$$(|\alpha|\beta|\gamma) = [|(\alpha\beta)|\gamma] = (\zeta|\gamma) = \gamma|\zeta = \gamma\alpha\beta = \alpha\beta\gamma.$$

3) Das innere Quadrat eines Feldes $(\alpha\beta)$. Setzen wir in der letzten Formel des vorigen Paragraphen $\gamma = \alpha$, $\delta = \beta$, so wird

$$(\alpha\beta)|(\alpha\beta) = (\alpha\beta)^2 = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta|\alpha \\ \alpha|\beta & \beta^2 \end{vmatrix} = \alpha^2\beta^2 - (\alpha|\beta)^2.$$

$$(\alpha\beta)^2 = a^2b^2 - a^2b^2 \cos^2(\alpha, \beta) = a^2b^2 \sin^2(\alpha, \beta),$$

demnach ist

$$\sqrt{(\alpha\beta)^2} = ab \sin(\alpha, \beta),$$

was zeigt, wie im Systeme dritter Stufe die Flächenzahl eines Feldes auszudrücken ist.

Steht insbesondere β auf α senkrecht, dann ist $\alpha|\beta = 0$ und es bleibt

$$(\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2 = a^2b^2,$$
$$\sqrt{(\alpha\beta)^2} = ab.$$

4) Das innere Quadrat der Ergänzung einer Strecke α.

$$(|\alpha)^2 = |\alpha||\alpha = (|\alpha)\alpha = \alpha|\alpha = \alpha^2 = a^2,$$

denn es ist, mit $|\alpha = \beta\gamma$, $(|\alpha)\alpha = (\beta\gamma)\alpha = \alpha(\beta\gamma) = \alpha|\alpha$.

5) Das innere Quadrat der Ergänzung eines Spatheckes. Nehmen wir $(\alpha\beta) = |\delta$, so ergiebt sich

$$[|(\alpha\beta)]^2 = |(\alpha\beta)|^2(\alpha\beta) = |(\alpha\beta)(\alpha\beta) = \delta(\alpha\beta) = (\alpha\beta)\delta$$
$$= (\alpha\beta)|(\alpha\beta) = (\alpha\beta)^2.$$

6) Der Zahlwert des inneren Produktes aus zwei Feldern. Mit $(\alpha\beta) = |\zeta$ und $(\gamma\delta) = |\eta$ ist zunächst nach § 19

$$(\alpha\beta)|(\gamma\delta) = \zeta|\eta = ze \cos(\zeta, \eta),$$

aber es ist

$$z = \sqrt{\zeta^2} = \sqrt{(\alpha\beta)^2} = ab \sin(\alpha, \beta), \quad e = \sqrt{\eta^2} = \sqrt{(\gamma\delta)^2} = cd \sin(\gamma, \delta),$$

mithin ist

$$(\alpha\beta)|(\gamma\delta) = abcd \sin(\alpha, \beta) \sin(\gamma, \delta) \cos(\zeta, \eta),$$

woraus ebenfalls hervorgeht, daſs dieses Produkt verschwindet, wenn seine Faktoren aufeinander senkrecht stehen, denn dann ist $\sphericalangle(\zeta, \eta) = \frac{1}{2}\pi$, $\cos(\zeta, \eta) = 0$.

7) Das äuſsere Produkt eines Spatheckes $(\alpha\beta)$ und der Ergänzung einer seiner Seiten (α).

Wir setzen $(\alpha\beta) = |\zeta$, wodurch zunächst wird

$$(\alpha\beta)|\alpha = |\zeta|\alpha = |(\zeta\alpha) = -|\alpha|\zeta = -|\alpha(\alpha\beta).$$

Weiter haben wir

$$(\alpha\beta)|\alpha = |(\zeta\alpha) = \vartheta, \tag{1}$$

und aus diesen Gleichungen folgt

$$\alpha\beta\vartheta = 0, \quad \vartheta|\alpha = 0,$$

so daſs das Ergebnis eine zu $(\alpha\beta)$ parallele und zu α senkrechte Strecke ϑ ist, deren Wert wir näher zu bestimmen haben. Wegen der ersten Bedingung für ϑ dürfen wir setzen

$$\vartheta = x\alpha + y\beta.$$

Die Multiplikation dieser Gleichung mit $|\alpha$ giebt, wenn wir die zweite Bedingung beachten,

$$\vartheta|\alpha = 0 = x\alpha^2 + y\alpha|\beta,$$

woraus folgt

$$\frac{x}{y} = -\frac{\alpha|\beta}{\alpha^2}, \quad x = -m(\alpha|\beta), \quad y = m\alpha^2.$$

Mithin ist auch

$$\vartheta = m\{\alpha^2\beta - (\alpha|\beta)\alpha\},$$
$$\vartheta|\beta = m\{\alpha^2\beta^2 - (\alpha|\beta)^2\} = m(\alpha\beta)^2.$$

Aber durch die (1) erhalten wir, wenn wir sie mit $|\beta$ multiplizieren,

$$\vartheta|\beta = (\alpha\beta)|\alpha|\beta = (\alpha\beta)|(\alpha\beta) = (\alpha\beta)^2,$$

und nun sagt die Vergleichung der beiden letzten Gleichungen aus, dafs der Koeffizient

$$m = 1$$

sein mufs. Folglich ist

$$(\alpha\beta)|\alpha = \alpha^2\beta - (\alpha|\beta)\alpha = \vartheta.$$

Benennen wir die Länge der Strecke ϑ durch l, so ergiebt sich

$$l^2 = [(\alpha\beta)|\alpha]^2 = [\zeta|\alpha]^2 = (\zeta\alpha)^2 = \zeta^2\alpha^2,$$

denn $\zeta|\alpha = 0$, und weil

$$\zeta^2 = (\alpha\beta)^2 = a^2b^2 \sin^2(\alpha, \beta),$$

so ist

$$l^2 = [(\alpha\beta)|\alpha]^2 = (\alpha\beta)^2\alpha^2 = a^4b^2 \sin^2(\alpha, \beta),$$
$$l = a^2b \sin(\alpha, \beta).$$

8) Das innere Produkt aus einer Strecke und einem Felde, von dem diese Strecke eine Seite ist. — Wir haben

$$\alpha|(\alpha\beta) = \alpha\zeta = -\zeta\alpha = -|(\alpha\beta)\alpha.$$

Weil

$$(\alpha\zeta)|(\alpha\beta) = 0$$

ist, so ist das Ergebnisfeld $(\alpha\zeta)$ senkrecht zu dem Felde $(\alpha\beta)$, und die Flächenzahl des resultierenden Spatheckes ist

$$\sqrt{[\alpha|(\alpha\beta)]^2} = \sqrt{(\alpha\zeta)^2} = a^2b \sin(\alpha, \beta).$$

9) Nehmen wir von dem vorhergehenden Ausdrucke die Ergänzung, so ergiebt sich

$$|[\alpha|(\alpha\beta)] = |\alpha|(\alpha\beta) = |\alpha(\alpha\beta) = |\alpha|\zeta = |(\alpha\zeta) = -|(\zeta\alpha)$$
$$= -|\zeta|\alpha = -[(\alpha\beta)|\alpha],$$

folglich ist nach 7)

$$|[\alpha|(\alpha\beta)] = -[(\alpha\beta)|\alpha] = (\alpha|\beta)\alpha - \alpha^2\beta.$$

10) Das innere Produkt aus einem Felde und einer beliebigen Strecke.

Mit $(\alpha\beta) = |\zeta$ erhalten wir

$$(\alpha\beta)|\gamma = |\zeta|\gamma = |(\zeta\gamma) = -|\gamma|\zeta = -|\gamma(\alpha\beta),$$

so dafs die Faktoren dieses Produktes nur mit Zeichenwechsel vertauscht werden dürfen.

Nun ist

$$(\alpha\beta)|\gamma = |(\zeta\gamma) = \vartheta,$$

der Wert dieses Produktes eine zu ζ und γ senkrechte Strecke ϑ. Aus der letzten Relation folgt

$$\alpha\beta\vartheta = 0, \quad \vartheta|\gamma = 0,$$

so dafs die Strecke ϑ zu der Ebene von $(\alpha\beta)$ parallel ist, wodurch wir setzen dürfen

$$\vartheta = x\alpha + y\beta.$$

Die Multiplikation dieser Gleichung mit $|\gamma$ giebt

$$\vartheta|\gamma = 0 = x(\alpha|\gamma) + y(\beta|\gamma),$$

so dafs

$$x = m(\beta|\gamma), \quad y = -m(\alpha|\gamma)$$

ist, womit

$$\vartheta = m\{(\beta|\gamma)\alpha - (\alpha|\gamma)\beta\}$$

wird und jetzt nur noch der Koeffizient m näher zu bestimmen ist. Nun giebt die Multiplikation der letzten Gleichung mit $|\eta = (\beta\gamma)$

$$\vartheta|\eta = m(\beta|\gamma)(\alpha|\eta) = m(\beta|\gamma)(\alpha\beta\gamma), \tag{1}$$

denn es ist $(\alpha|\gamma)(\beta|\eta) = 0$, weil $\beta|\eta = \beta\beta\gamma = 0$ ist; ferner erhalten wir durch

$$\vartheta = (\alpha\beta)|\gamma,$$

wenn wir diese Gleichung mit $|\eta$ multiplizieren,

$$\begin{aligned}\vartheta|\eta = (\alpha\beta)|(\gamma\eta) &= -(\alpha\beta)[|\eta|\gamma] = (\alpha\beta)[(\gamma\beta)|\gamma] \\ &= (\alpha\beta)[\gamma^2\beta - (\beta|\gamma)\gamma] = -(\beta|\gamma)(\alpha\beta\gamma).\end{aligned} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt, dafs $m = -1$ ist, daher ist

$$(\alpha\beta)|\gamma = (\alpha|\gamma)\beta - (\beta|\gamma)\alpha.$$

Diese Formel lehrt, dafs auch ist

$$(\beta\gamma)|\alpha = (\beta|\alpha)\gamma - (\gamma|\alpha)\beta,$$
$$(\gamma\alpha)|\beta = (\gamma|\beta)\alpha - (\alpha|\beta)\gamma,$$

und die Addition der drei letzten Gleichungen giebt

$$(\alpha\beta)|\gamma + (\beta\gamma)|\alpha + (\gamma\alpha)|\beta = 0.$$

11) Die Ergänzung des inneren Produktes aus einer Strecke und einem Spathecke. — Wir haben

$$|[\gamma|(\alpha\beta)] = |\gamma(\alpha\beta) = |\gamma|\eta = -(|\eta|\gamma)$$
$$= -(\alpha\beta)|\gamma,$$

folglich ist

$$|[\gamma|(\alpha\beta)] = (\beta|\gamma)\alpha - (\alpha|\gamma)\beta,$$
$$|[\alpha|(\beta\gamma)] = (\gamma|\alpha)\beta - (\alpha|\beta)\gamma,$$
$$|[\beta|(\gamma\alpha)] = (\alpha|\beta)\gamma - (\beta|\gamma)\alpha,$$

und aus diesen drei Gleichungen ergiebt sich

$$|[\gamma|(\alpha\beta)] + |[\alpha|(\beta\gamma)] + |[\beta|(\gamma\alpha)] = 0.$$

12) Darstellung des äufseren Produktes aus zwei Feldern durch die Summe zweier Strecken. — Sei $(\alpha\beta) = |\zeta$, $(\gamma\delta) = |\eta$. Damit erhalten wir

$$(\alpha\beta)(\gamma\delta) = (\alpha\beta)|\eta = (\alpha|\eta)\beta - (\beta|\eta)\alpha,$$

also ist

$$(\alpha\beta)(\gamma\delta) = (\alpha\gamma\delta)\beta - (\beta\gamma\delta)\alpha; \qquad (1)$$

ferner haben wir

$$(\alpha\beta)(\gamma\delta) = -(\gamma\delta)(\alpha\beta) = -[(\gamma\delta)|\zeta] = -[(\gamma|\zeta)\delta - (\delta|\zeta)\gamma],$$

mithin ist auch

$$(\alpha\beta)(\gamma\delta) = (\delta\alpha\beta)\gamma - (\gamma\alpha\beta)\delta. \qquad (2)$$

Subtrahieren wir die (2) von der (1), so ergiebt sich noch

$$(\alpha\beta\gamma)\delta = (\beta\gamma\delta)\alpha + (\delta\gamma\alpha)\beta + (\alpha\beta\delta)\gamma.$$

13) Ist die Strecke δ eine Vielfachensumme der Strecken α, β und γ, ist

$$\delta = x\alpha + y\beta + z\gamma, \qquad (1)$$

dann folgt zunächst aus dieser Gleichung

$$\delta\beta\gamma = x\alpha\beta\gamma, \quad \delta\gamma\alpha = y\alpha\beta\gamma, \quad \delta\alpha\beta = z\alpha\beta\gamma,$$

d. h. $x = (\delta\beta\gamma) : (\alpha\beta\gamma)$, $y = (\delta\gamma\alpha) : (\alpha\beta\gamma)$, $z = (\delta\alpha\beta) : (\alpha\beta\gamma)$,

und nun geht mit diesen Werten der Koeffizienten die (1) über in

$$(\alpha\beta\gamma)\delta = (\beta\gamma\delta)\alpha + (\delta\gamma\alpha)\beta + (\alpha\beta\delta)\gamma.$$

14) Das äufsere Produkt aus zwei Gröfsen dritter Stufe. Wir setzen

$$\alpha_1 = \sum_{k=1}^{k=3} a_k\varepsilon_k, \quad \alpha_2 = \sum_{k=1}^{k=3} b_k\varepsilon_k, \quad \alpha_3 = \sum_{k=1}^{k=3} c_k\varepsilon_k,$$
$$\beta_1 = \sum_{k=1}^{k=3} d_k\varepsilon_k, \quad \beta_2 = \sum_{k=1}^{k=3} e_k\varepsilon_k, \quad \beta_3 = \sum_{k=1}^{k=3} f_k\varepsilon_k.$$

Damit erhalten wir für das Produkt $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)(\beta_1 \beta_2 \beta_3)$, wenn wir die Multiplikation ausführen und die sich dadurch ergebenden Glieder zusammenfassen,

$$\begin{aligned}(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)(\beta_1 \beta_2 \beta_3) &= [(a_1 b_2 - a_2 b_1)c_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)c_2] \\ &\quad \times [(d_1 e_2 - d_2 e_1)f_3 + (d_2 e_3 - d_3 e_2)f_1 + (d_3 e_1 - d_1 e_3)f_2] \\ &= \sum_1^3 a_k d_k \sum_1^3 b_k e_k \sum_1^3 c_k f_k - \sum_1^3 c_k d_k \sum_1^3 b_k e_k \sum_1^3 a_k f_k \\ &\quad + \sum_1^3 b_k d_k \sum_1^3 c_k e_k \sum_1^3 a_k f_k - \sum_1^3 b_k d_k \sum_1^3 a_k e_k \sum_1^3 c_k f_k \\ &\quad + \sum_1^3 c_k d_k \sum_1^3 a_k e_k \sum_1^3 b_k f_k - \sum_1^3 a_k d_k \sum_1^3 c_k e_k \sum_1^3 b_k f_k,\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)(\beta_1 \beta_2 \beta_3) &= (\alpha_1|\beta_1)(\alpha_2|\beta_2)(\alpha_3|\beta_3) - (\alpha_3|\beta_1)(\alpha_2|\beta_2)(\alpha_1|\beta_3) \\ &\quad + (\alpha_2|\beta_1)(\alpha_3|\beta_2)(\alpha_1|\beta_3) - (\alpha_2|\beta_1)(\alpha_1|\beta_2)(\alpha_3|\beta_3) \\ &\quad + (\alpha_3|\beta_1)(\alpha_1|\beta_2)(\alpha_2|\beta_3) - (\alpha_1|\beta_1)(\alpha_3|\beta_2)(\alpha_2|\beta_3),\end{aligned}$$

oder, weil die rechte Seite dieser Gleichung eine Determinante ist,

$$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)(\beta_1 \beta_2 \beta_3) = \begin{vmatrix} \alpha_1|\beta_1 & \alpha_2|\beta_1 & \alpha_3|\beta_1 \\ \alpha_1|\beta_2 & \alpha_2|\beta_2 & \alpha_3|\beta_2 \\ \alpha_1|\beta_3 & \alpha_2|\beta_3 & \alpha_3|\beta_3 \end{vmatrix}.$$

§ 21. Lösung stereometrischer Aufgaben.

1) „Bei jedem vierseitigen Prisma mit parallelen Grundflächen ist die Summe der Quadrate über den sämtlichen Kanten gleich der Summe der Quadrate über seinen Diagonalen plus dem achtfachen Quadrate über der die Halbierungspunkte seiner Diagonalen verbindenden Strecke.“

Fig. 41.

Sei $OACBDEGF$ (Fig. 41) ein beliebiges vierseitiges Prisma, $\overline{OA} = \alpha$, $\overline{OB} = \beta$, $\overline{OC} = \gamma$, $\overline{OD} = \delta$. Die Summe der inneren Quadrate seiner Kanten ist

$$2\{\alpha^2 + \beta^2 + (\gamma - \alpha)^2 + (\gamma - \beta)^2 + 2\delta^2\} = 4\{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - \alpha|\gamma - \beta|\gamma\}. \quad (1)$$

Die Summe der inneren Quadrate seiner Diagonalen ist

$$(\delta + \gamma)^2 + (\delta - \gamma)^2 + (\delta + \alpha - \beta)^2 + (\delta - \alpha + \beta)^2 = 2\{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\delta^2 - 2\alpha|\beta\}. \quad (2)$$

Der in O entspringende Fahrstrahl des Halbierungspunktes der Diagonalen $\overline{OG}$ und $\overline{CD}$ ist gleich $\frac{1}{2}(\delta+\gamma)$, derjenige der Diagonalen $\overline{AF}$ und $\overline{BE}$ ist gleich $\frac{1}{2}(\delta+\alpha+\beta)$, daher ist die die Schnittpunkte der Diagonalen verbindende Strecke $\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$, und ihr achtfaches inneres Quadrat ist gleich

$$2\{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha|\beta-2\alpha|\gamma-2\beta|\gamma\}. \qquad (3)$$

Die Addition der Ausdrücke (2) und (3) giebt den Ausdruck (1), woraus der obige Satz folgt.

2) „Bei einem jeden Tetraeder ist die Summe der Produkte aus den Längen der gegenüberliegenden Kanten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels gleich Null.“

Es seien α, β, γ, δ die Fahrstrahlen der vier Eckpunkte A, B, C, D resp. eines Tetraeders mit einem beliebigen Punkte O des Raumes als Koordinatenursprung. — Die Summe der inneren Produkte aus den gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders ist

$$(\alpha-\delta)|(\gamma-\beta)+(\beta-\delta)|(\alpha-\gamma)+(\gamma-\delta)|(\beta-\alpha)=0,$$

was sich durch Auswertung der Summe ergiebt, indem wir die innere Multiplikation durchführen. Daraus geht hervor

$$\overline{DA}|\overline{BC}+\overline{DB}|\overline{CA}+\overline{DC}|\overline{AB}=0,$$

womit der Satz bewiesen ist.

3) „Sind zwei Paare gegenüberliegender Kanten eines Tetraeders zu einander senkrecht, so ist dies auch das dritte Paar.“

Sind nämlich bei derselben Bezeichnung wie unter 2) die Kanten $(\delta-\alpha)$ und $(\gamma-\beta)$, sowie $(\delta-\gamma)$ und $(\beta-\alpha)$ zu einander senkrecht, so dafs

$$(\delta-\alpha)|(\gamma-\beta)=0, \quad (\delta-\gamma)|(\beta-\alpha)=0$$

ist, dann resultiert aus der Addition dieser beiden Gleichungen

$$(\delta-\beta)|(\gamma-\alpha)=0,$$

was aussagt, dafs auch das dritte Kantenpaar normal zu einander ist.

4) „In einem Tetraeder, dessen gegenüberliegende Kanten aufeinander senkrecht stehen, schneiden sich die Höhenlinien in einem Punkte.“

Seien $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ die Höhenstrecken eines solchen Tetraeders mit den Eckpunkten A, B, C, D resp., α', β', γ', δ' die Träger ihrer Fufspunkte A', B', C', D' resp. — Für die Höhenstrecken $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ haben wir die Bedingungen

$$(\alpha - \alpha')|(\gamma - \delta) = 0, \quad (\beta - \beta')|(\gamma - \delta) = 0.$$

Subtrahieren wir die zweite Gleichung von der ersten und beachten dabei, dafs

$$(\alpha - \beta)|(\gamma - \delta) = 0$$

ist, so ergiebt sich

$$(\beta' - \alpha')|(\gamma - \delta) = 0.$$

Mithin sind $\overline{A'B'}$ und $\overline{AB}$ parallele Strecken. In derselben Weise, oder durch Buchstabenvertauschung finden wir, dafs $\overline{B'C'}$ und $\overline{BC}$, $\overline{C'A'}$ und $\overline{CA}, \ldots$ parallel sind.

„Die Kanten der Pyramide über den Fufspunkten der Höhenstrecken sind parallel zu den gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders.“

Nun sind die Strecken $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ senkrecht zu den Seiten des Dreiecks $A'B'C'$, sie fallen mit den Höhenlinien dieses Dreiecks zusammen, denn sie liegen in der Ebene dieses Dreiecks, wie leicht zu ersehen ist, folglich schneiden sie sich in einem Punkte H, und durch diesen Punkt geht auch die vierte Höhenstrecke $\overline{DD'}$, was sich ergiebt, wenn wir $\overline{CC'}$ mit $\overline{DD'}$ vertauschen.

5) Schneiden sich die Höhenlinien einer Pyramide in einem Punkte H, setzen wir den Träger dieses Punktes gleich ζ, dann ist

$$(\alpha - \zeta)|(\gamma - \delta) = 0, \quad (\beta - \zeta)|(\gamma - \delta) = 0,$$

folglich ist auch

$$(\alpha - \beta)|(\gamma - \delta) = 0,$$

d. h. die Gegenkanten einer solchen Pyramide sind zu einander senkrecht.

6) Für das Tetraeder der beliebig im Raume gelegenen Punkte A, B, C, D besteht die Relation

$$\overline{AB}|\overline{CD} = (\beta - \alpha)|(\delta - \gamma) = \beta|\delta - \alpha|\delta - \beta|\gamma + \alpha|\gamma.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} 2(\beta|\delta - \alpha|\delta - \beta|\gamma + \alpha|\gamma) &= \beta^2 - 2\beta|\gamma + \gamma^2 - \alpha^2 + 2\alpha|\gamma - \gamma^2 \\ &\quad - \beta^2 + 2\beta|\delta - \delta^2 + \alpha^2 - 2\alpha|\delta + \delta^2 \\ &= (\beta-\gamma)^2 + (\alpha-\delta)^2 - (\beta-\delta)^2 - (\alpha-\gamma)^2, \end{aligned}$$

folglich ist

$$\begin{aligned} \overline{AB}|\overline{CD} &= \frac{1}{2}\{(\gamma - \beta)^2 + (\delta - \alpha)^2 - (\delta - \beta)^2 - (\gamma - \alpha)^2\} \\ &= \frac{1}{2}\{\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 - \overline{CA}^2\}. \end{aligned}$$

Sind die Gegenkanten des Tetraeders zu einander senkrecht, so ist

$$(\beta - \alpha)|(\gamma - \delta) = 0,$$

folglich

$$(\delta - \alpha)^2 + (\gamma - \beta)^2 = (\delta - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2,$$

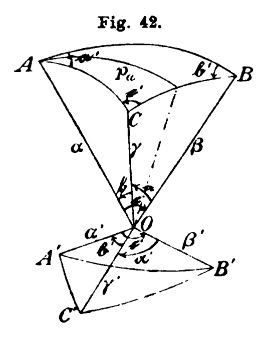
d. i.

$$\overline{AD}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CA}^2.$$

§ 22. Ableitung der Fundamentalformeln der sphärischen Trigonometrie.

Legen wir durch je zwei von drei Punkten A, B und C auf einer Kugelfläche, die nicht Punkte eines gröfsten Kreises auf dieser Fläche sind, gröfste Kreise, dann entsteht auf ihr ein sphärisches Dreieck ABC (Fig. 42). Die Ebenen dieser drei gröfsten Kreise gehen durch den Mittelpunkt O der Fläche, von dem alle ihre Punkte gleich weit entfernt sind, je zwei von ihnen schneiden sich in den Kugelradien $\overline{OA} = \alpha$, $\overline{OB} = \beta$, $\overline{OC} = \gamma$, und heifst die von diesen Ebenen und dem sphärischen Dreiecke begrenzte Fläche ein sphärisches Dreikant. Die drei Flächenwinkel an der Spitze des sphärischen Dreikantes $OABC$ seien bezeichnet $\sphericalangle(\alpha, \beta) = \mathfrak{c}$, $\sphericalangle(\beta, \gamma) = \mathfrak{a}$, $\sphericalangle(\gamma, \alpha) = \mathfrak{b}$. Der Winkel, welchen zwei Seitenflächen des Dreikants miteinander einschliefsen, ist gleich dem Winkel, welchen zwei zu deren Ebenen senkrechte Geraden miteinander bilden, die wir im Raume ganz beliebig legen, also auch durch den Punkt O gehen lassen können, so dafs, wenn $\alpha' = \overline{OA'}$, $\beta' = \overline{OB'}$, $\gamma' = \overline{OC'}$ zu den Seitenflächen OBC, OCA, OAB resp. senkrechte Strecken in der Weise sind, dafs $\alpha\beta\gamma'$, $\beta\gamma\alpha'$, $\gamma\alpha\beta'$ Spathe gleichen Entstehungssinnes sind, die Winkel $\sphericalangle(\alpha', \beta') = \mathfrak{c}'$, $\sphericalangle(\beta', \gamma') = \mathfrak{a}'$, $\sphericalangle(\gamma', \alpha') = \mathfrak{b}'$ gleich den Winkeln sind, welche die Seitenflächen OBC und OCA, OCA und OAB, OAB und OBC, also auch die Bogen oder die Seiten $\widehat{BC}$ und $\widehat{CA}$, $\widehat{CA}$ und $\widehat{AB}$, $\widehat{AB}$ und $\widehat{BC}$ des sphärischen Dreiecks miteinander einschliefsen. Sind überdies α', β' und γ' Radialstrecken derselben Kugelfläche, dann sind ihre Endelemente A', B' und C' Eckpunkte eines zweiten sphärischen Dreiecks auf derselben Fläche, und $O'A'B'C'$ ist ein zweites sphärisches Dreikant. Das sphärische Dreieck $A'B'C'$ nennen wir das Neben- oder Polardreieck zu dem sphärischen Dreiecke ABC und das sphärische Dreikant $OA'B'C'$ das Neben- oder Polardreikant zu dem Dreikante $OABC$.

Fig. 42.



Weil es nur darauf ankommt, die Beziehungen zwischen den Seiten $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ und den Winkeln $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ des sphärischen Drei-

ecks zu bestimmen, so ist die Gröfse des Halbmessers der Kugelfläche gleichgültig, weshalb wir uns denselben von der Länge Eins denken, so dafs das sphärische Dreieck ABC auf der um den Punkt O beschriebenen Einheitskugel liegend erscheint, und die Relation besteht

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \alpha'^2 = \beta'^2 = \gamma'^2 = 1.$$

1) Infolge der Bezeichnung und dieser Annahme haben wir

$$\begin{array}{lll}
\alpha|\beta = \cos \mathfrak{c}, & \beta|\gamma = \cos \mathfrak{a}, & \gamma|\alpha = \cos \mathfrak{b}, \\
\alpha'|\beta' = \cos \mathfrak{c}', & \beta'|\gamma' = \cos \mathfrak{a}', & \gamma'|\alpha' = \cos \mathfrak{b}', \\
|(\beta\gamma) = \sin \mathfrak{a}\alpha', & |(\gamma\alpha) = \sin \mathfrak{b}\beta', & |(\alpha\beta) = \sin \mathfrak{c}\gamma', \\
|(\beta'\gamma') = \sin \mathfrak{a}'\alpha, & |(\gamma'\alpha') = \sin \mathfrak{b}'\beta, & |(\alpha'\beta') = \sin \mathfrak{c}'\gamma, \\
(\beta\gamma)^2 = \sin^2 \mathfrak{a}, & (\gamma\alpha)^2 = \sin^2 \mathfrak{b}, & (\alpha\beta)^2 = \sin^2 \mathfrak{c}, \\
(\beta'\gamma')^2 = \sin^2 \mathfrak{a}', & (\gamma'\alpha')^2 = \sin^2 \mathfrak{b}', & (\alpha'\beta')^2 = \sin^2 \mathfrak{c}'.
\end{array}$$

Nun ist

$$|(\alpha\beta)|(\beta\gamma) = \sin \mathfrak{c}\gamma' \sin \mathfrak{a}\alpha' = \sin \mathfrak{c} \sin \mathfrak{a}(\gamma'\alpha'),$$

wodurch

$$|[|(\alpha\beta)|(\beta\gamma)] = \sin \mathfrak{c} \sin \mathfrak{a}|(\gamma'\alpha') = \sin \mathfrak{c} \sin \mathfrak{a} \sin \mathfrak{b}'\beta$$

wird, und weil

$$|[|(\alpha\beta)|(\beta\gamma)] = (\alpha\beta)(\beta\gamma) = (\alpha\beta\gamma)\beta$$

ist, so ergiebt sich

$$\alpha\beta\gamma = \sin \mathfrak{c} \sin \mathfrak{a} \sin \mathfrak{b}'.$$

In gleicher Weise, aber auch einfach durch entsprechende Buchstabenvertauschung in der vorstehenden Formel erhalten wir noch

$$\alpha\beta\gamma = \sin \mathfrak{a} \sin \mathfrak{b} \sin \mathfrak{c}',$$

$$\alpha\beta\gamma = \sin \mathfrak{b} \sin \mathfrak{c} \sin \mathfrak{a}'.$$

Aus den drei Gleichungen für das Produkt $(\alpha\beta\gamma)$ geht hervor, dafs

$$\sin \mathfrak{c} \sin \mathfrak{a} \sin \mathfrak{b}' = \sin \mathfrak{a} \sin \mathfrak{b} \sin \mathfrak{c}' = \sin \mathfrak{b} \sin \mathfrak{c} \sin \mathfrak{a}'$$

ist, folglich haben wir die Relationen

$$\frac{\sin \mathfrak{b}}{\sin \mathfrak{c}} = \frac{\sin \mathfrak{b}'}{\sin \mathfrak{c}'}, \quad \frac{\sin \mathfrak{c}}{\sin \mathfrak{a}} = \frac{\sin \mathfrak{c}'}{\sin \mathfrak{a}'}, \quad \frac{\sin \mathfrak{a}}{\sin \mathfrak{b}} = \frac{\sin \mathfrak{a}'}{\sin \mathfrak{b}'},$$

oder

$$\sin \mathfrak{a}' : \sin \mathfrak{b}' : \sin \mathfrak{c}' = \sin \mathfrak{a} : \sin \mathfrak{b} : \sin \mathfrak{c}, \qquad \text{(I)}$$

welche Gleichung den Sinussatz oder die erste Fundamentalformel der sphärischen Trigonometrie ausmacht.

Zu dem zweiten Satze gelangen wir auf folgendem Wege.

Es ist

$$|(\alpha\beta)(\beta\gamma) = |(\alpha\beta)|[|(\beta\gamma)]$$
$$= \sin \mathfrak{c}\gamma'|[\sin \mathfrak{a}\alpha'] = \sin \mathfrak{c} \sin \mathfrak{a}\gamma'|\alpha',$$
$$|(\alpha\beta)(\beta\gamma) = \sin \mathfrak{c} \sin \mathfrak{a} \cos \mathfrak{b}', \tag{1}$$

und ferner ist

$$|(\alpha\beta)(\beta\gamma) = (\beta\gamma)|(\alpha\beta) = \begin{vmatrix} \beta|\alpha & \gamma|\alpha \\ \beta|\beta & \gamma|\beta \end{vmatrix} = (\alpha|\beta)(\beta|\gamma) - (\gamma|\alpha),$$
$$|(\alpha\beta)(\beta\gamma) = \cos \mathfrak{c} \cos \mathfrak{a} - \cos \mathfrak{b}. \tag{2}$$

Jetzt resultiert aus den Gleichungen (1) und (2)

$$\sin \mathfrak{c} \sin \mathfrak{a} \cos \mathfrak{b}' = \cos \mathfrak{c} \cos \mathfrak{a} - \cos \mathfrak{b}, \tag{3}$$

aus welcher Relation zwei weitere Gleichungen durch entsprechende Buchstabenvertauschung folgen.

Nun ergiebt sich aus (3) und sodann durch Buchstabenvertauschung

$$\left.\begin{aligned} \cos \mathfrak{b} &= \cos \mathfrak{c} \cos \mathfrak{a} - \sin \mathfrak{c} \sin \mathfrak{a} \cos \mathfrak{b}', \\ \cos \mathfrak{c} &= \cos \mathfrak{a} \cos \mathfrak{b} - \sin \mathfrak{a} \sin \mathfrak{b} \cos \mathfrak{c}', \\ \cos \mathfrak{a} &= \cos \mathfrak{b} \cos \mathfrak{c} - \sin \mathfrak{b} \sin \mathfrak{c} \cos \mathfrak{a}', \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

welche Formeln den zweiten Fundamentalsatz der sphärischen Trigonometrie oder ihren Cosinussatz ausdrücken.

2) Für die Tangente des Winkels $\mathfrak{b}'$ besteht die Relation

$$\operatorname{tg} \mathfrak{b}' = \frac{\sin \mathfrak{b}'}{\cos \mathfrak{b}'} = \frac{\sqrt{(\gamma'\alpha')^2}}{\gamma'|\alpha'}.$$

Nun haben wir aber

$$(\gamma'\alpha')^2 = \left[\frac{|(\alpha\beta)|(\beta\gamma)}{\sin \mathfrak{c} \sin \mathfrak{a}}\right]^2 = \left[\frac{(\alpha\beta\gamma)|\beta}{\sin \mathfrak{c} \sin \mathfrak{a}}\right]^2,$$
$$\sqrt{(\gamma'\alpha')^2} = \frac{\alpha\beta\gamma}{\sin \mathfrak{c} \sin \mathfrak{a}},$$
$$\gamma'|\alpha' = \frac{|(\alpha\beta)(\beta\gamma)}{\sin \mathfrak{c} \sin \mathfrak{a}} = \frac{(\beta\gamma)|(\alpha\beta)}{\sin \mathfrak{c} \sin \mathfrak{a}} = \frac{(\alpha|\beta)(\beta|\gamma) - \gamma|\alpha}{\sin \mathfrak{c} \sin \mathfrak{a}}.$$

Mithin ist

$$\operatorname{tg} \mathfrak{b}' = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha|\beta)(\beta|\gamma) - \gamma|\alpha},$$

oder

$$\operatorname{tg} \mathfrak{b}' = \frac{\sin \mathfrak{a} \sin \mathfrak{b} \sin \mathfrak{c}'}{\cos \mathfrak{c} \cos \mathfrak{a} - \cos \mathfrak{b}} = \frac{\sin \mathfrak{b} \sin \mathfrak{c} \sin \mathfrak{a}'}{\cos \mathfrak{c} \cos \mathfrak{a} - \cos \mathfrak{b}} = \frac{\sin \mathfrak{c} \sin \mathfrak{a} \sin \mathfrak{b}'}{\cos \mathfrak{c} \cos \mathfrak{a} - \cos \mathfrak{b}}.$$

Die Formeln für $\operatorname{tg} \mathfrak{c}'$ und $\operatorname{tg} \mathfrak{a}'$ ergeben sich dadurch, dafs wir in den vorstehenden Relationen die Nenner entsprechend ändern.

3) Wir haben die Gleichung

$$(\beta\gamma)|\alpha = (\alpha|\beta)\gamma - (\gamma|\alpha)\beta,$$

daher ist

$$[(\beta\gamma)|\alpha + (\beta|\gamma)\alpha]^2 = [(\alpha|\beta)\gamma - (\gamma|\alpha)\beta + (\beta|\gamma)\alpha]^2.$$

Führen wir nun auf beiden Seiten dieser Gleichung die innere Multiplikation aus, setzen sodann für die sich so ergebenden Streckenprodukte die obigen Werte, beachten, daſs

$$\alpha'|\alpha = \frac{\alpha\beta\gamma}{\sin\mathfrak{a}}$$

ist, so kommen wir auf die Relation

$$1 - \sin^2\mathfrak{a}\sin^2\mathfrak{b}\sin^2\mathfrak{c}' = \cos^2\mathfrak{a} + \cos^2\mathfrak{b} + \cos^2\mathfrak{c} - 2\cos\mathfrak{a}\cos\mathfrak{b}\cos\mathfrak{c}.$$

4) Für das Produkt $(\alpha\beta\gamma)$ haben wir die Relation

$$\alpha\beta\gamma = \sin\mathfrak{c}\sin\mathfrak{a}\sin\mathfrak{b}' = \sin\mathfrak{a}\cos(\alpha, \alpha'). \qquad (1)$$

Fällen wir von der Ecke A aus auf die Gegenseite $\widehat{BC}$ des sphärischen Dreiecks ABC (Fig. 42, S. 141) eine sphärische Normale und bezeichnen wir die Länge dieses Bogens eines gröſsten Kreises auf der Kugelfläche mit p_a, so ist, weil α', α und die sphärische Normale in einer Ebene liegen, $\cos(\alpha, \alpha') = \sin p_a$. Dadurch ergiebt sich aus der Relation (1)

$$\sin\mathfrak{a}\sin p_a = \sin\mathfrak{c}\sin\mathfrak{a}\sin\mathfrak{b}',$$

$$\sin p_a = \sin\mathfrak{c}\sin\mathfrak{b}'.$$

Nach der ersten dieser beiden Gleichungen ist offenbar

$$\sin\mathfrak{a}\sin p_a = \sin\mathfrak{b}\sin p_b = \sin\mathfrak{c}\sin p_c = \sin\mathfrak{c}\sin\mathfrak{a}\sin\mathfrak{b}'.$$

Diese Beziehungen führen uns auf

$$\sin p_a = \frac{\sin\mathfrak{b}}{\sin\mathfrak{a}}\sin p_b = \frac{\sin\mathfrak{c}}{\sin\mathfrak{a}}\sin p_c,$$

$$\sin p_a = \sin\mathfrak{c}\sin\mathfrak{b}' = \sin\mathfrak{b}\sin\mathfrak{c}' = \frac{\sin\mathfrak{b}\sin\mathfrak{c}\sin\mathfrak{a}'}{\sin\mathfrak{a}}.$$

In allgemeiner Weise hat Graſsmann die Fundamentalformeln der sphärischen Trigonometrie in dem zwölften Bande der mathematischen Annalen (1877) entwickelt.

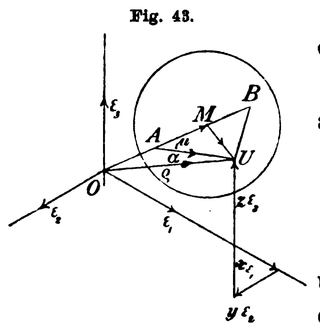
§ 23. Die Kugelfläche.

1) Gleichungen der Fläche. Sei M der Mittelpunkt einer Kugelfläche, deren Radius die Länge a besitze, U ein beliebiger Punkt derselben, O irgend ein Punkt des Raumes (Fig. 43) $(M - O) = \mu$, $(U - M) = \alpha$, $(U - O) = \varrho$. — Damit ist

$$\varrho - \mu = \alpha,$$

und weil $\alpha^{\lambda} = a^2$, gleich einer konstanten Gröfse ist, so giebt die innere Quadratur der Seiten der vorstehenden Gleichung

Fig. 43.



$$(\varrho - \mu)^{\lambda} = a^2,$$

oder

$$\varrho^{\lambda} - 2\mu|\varrho = a^2 - m^2 = c^2 \tag{1}$$

als eine Streckengleichung der Kugelfläche.

Setzen wir

$$\varrho = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3,$$

$$\mu = m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2 + m_3\varepsilon_3$$

und bilden die relativen Einheiten ε_1, ε_2, ε_3 ein Normalsystem, dann haben wir

$$[(x - m_1)\varepsilon_1 + (y - m_2)\varepsilon_2 + (z - m_3)\varepsilon_3]^{\lambda} = a^2,$$

woraus folgt

$$(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 + (z - m_3)^2 = a^2 \tag{1'}$$

als Gleichung der Fläche in rechtwinkligen Koordinaten.

Fällt der Punkt O mit dem Punkte A der Fläche zusammen, dann ist $\mu^{\lambda} = \alpha^{\lambda}$, so dafs

$$\varrho^{\lambda} - 2\mu|\varrho = 0, \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(m_1x + m_2y + m_3z) = 0 \tag{2'}$$

entsprechende Gleichungen der Fläche sind.

Ist $O = M$, so ist $\mu = 0$, daher sind

$$\varrho^{\lambda} = a^2, \tag{3}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \tag{3'}$$

Mittelpunktsgleichungen der Kugelfläche.

Aus der allgemeinen Cartesischen Koordinatengleichung (1′) der Fläche folgt

$$z = m_3 \pm \sqrt{\{a^2 - m_1^2 - m_2^2 - x^2 - y^2 + 2(m_1x + m_2y)\}} = \mathfrak{f}(x, y),$$

mithin ist auch

$$\varrho = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + \mathfrak{f}(x, y)\varepsilon_3 \tag{4}$$

eine Streckengleichung der Fläche.

Mit $\mu = 0$ geht die (4) über in

$$\varrho = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}\,\varepsilon_3. \tag{5}$$

In diesem Falle ist

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2} = 1.$$

Setzen wir nun

$$\mathfrak{f}\varrho = \frac{x}{a^2}\varepsilon_1 + \frac{y}{a^2}\varepsilon_2 + \frac{z}{a^2}\varepsilon_3,$$

wobei also $\mathfrak{f}\varrho$ eine Streckenfunktion des Fahrstrahles ϱ bedeutet, dann ist

$$\varrho|\mathfrak{f}\varrho = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1,$$

mithin auch

$$\varrho|\mathfrak{f}\varrho = 1 \tag{6}$$

eine Streckengleichung der Fläche und zwar die einfachste, welche vorteilhaft zu Untersuchungen verwendet werden kann, was die analytische Geometrie lehrt.

2) Die Gleichung (2) unter 1) kann geschrieben werden

$$\varrho|(\varrho - 2\mu) = 0,$$

in welcher Form sie den Satz giebt:

„Ziehen wir von den Endelementen irgend eines Kugeldurchmessers Strecken nach einem beliebigen Punkte der Fläche, so sind diese Strecken zu einander normal."

3) Sei O Mittelpunkt eines Ebenenbündels, μ der Streckenabstand des festen Punktes B von O, α die von B auf eine der Ebenen gefällte Normale, dann ist

$$\alpha|\varrho = 0, \quad \varrho - \mu = \alpha,$$

die erstere dieser Gleichungen eine Gleichung der Ebene. Nun ergiebt sich aus diesen Gleichungen, wenn wir die letzte mit $|\varrho$ multiplizieren,

$$\varrho^2 - \mu|\varrho = 0.$$

Demnach ist der Ort der Fuſspunkte der Perpendikel eine Kugelfläche vom Durchmesser μ.

4) Schnitt einer Kugelfläche und einer Ebene. Eine Ebene gehe durch den Endpunkt der Strecke γ und stehe senkrecht auf ihr. Bezeichnet ϱ den Fahrstrahl eines beliebigen Punktes dieser Ebene, dann ist, unter der Annahme, daſs γ und ϱ ein gemeinsames Anfangselement besitzen,

$$\varrho - \gamma = \zeta, \quad \zeta|\gamma = 0,$$

woraus folgt, wenn wir die erste Gleichung mit $|\gamma$ multiplizieren,

$$\varrho|\gamma = \gamma^2, \quad \text{oder} \quad \varrho|\gamma = c^2$$

als eine Gleichung dieser Ebene.

Nun seien die Gleichungen der Kugelfläche und der sie schneidenden Ebene

$$\varrho^2 = a^2, \quad \varrho|\gamma = c^2.$$

Bezeichnet τ den Fahrstrahl vom Fufspunkte des Perpendikels γ auf die Ebene nach einem beliebigen Punkte des Schnittes beider Flächen, so ist

$$\gamma + \tau = \varrho,$$

mithin

$$\gamma^2 + 2\gamma|\tau + \tau^2 = \varrho^2,$$

und weil $\gamma|\tau = 0$ ist, so ergiebt sich hieraus in Verbindung mit der Gleichung der Kugelfläche

$$\tau^2 = a^2 - c^2.$$

Das ist aber die Mittelpunktsgleichung eines Kreises von der Halbmesserlänge $\sqrt{a^2 - c^2}$. Mit $\gamma = 0$ geht der Schnitt durch das Kugelzentrum, er ist dann ein gröfster Kreis der Fläche, mit $\gamma^2 = a^2$ wird $\tau = 0$, der Schnittkreis reduziert sich auf einen Punkt, die Ebene berührt die Kugelfläche, und mit $c > a$ wird der Schnitt imaginär.

„Wird eine Kugelfläche von einer Ebene geschnitten, so geschieht solches in einer Kreislinie.“

5) Schnitt zweier Kugelflächen. Mit ein und demselben Beziehungspunkte seien die Gleichungen der sich schneidenden Kugelflächen

$$\varrho - 2\mu|\varrho = c, \quad \varrho' - 2\mu'|\varrho' = c'.$$

Für ihre gemeinsamen Punkte ist $\varrho = \varrho'$, mithin

$$2(\mu - \mu')|\varrho = c' - c. \tag{1}$$

Nun war die Gleichung der durch den Endpunkt von γ gehenden und zu dieser Strecke normalen Ebene

$$\varrho|\gamma = c^2,$$

daher ist auch

$$\varrho|m\gamma = mc^2$$

oder, wenn wir $m\gamma = \delta$, $mc^2 = c_1$ setzen,

$$\varrho|\delta = c_1,$$

welche Gleichung einer beliebigen zu δ senkrechten Ebene angehört. Daher ist die (1) die Gleichung einer zu der Zentrallinie der beiden Kugelflächen senkrechten Ebene, und weil eine Ebene eine Kugelfläche in einem Kreise schneidet, so folgt:

„Die Schnittlinie zweier sich schneidenden Kugelflächen ist eine Kreislinie, ihre Ebene steht senkrecht auf der Zentrallinie beider Flächen.“

6) Die Berührungsebene. Hat eine Ebene mit einer Kugelfläche einen verschwindenden Kreis, einen Punkt gemein, so steht sie auf der nach diesem Punkte gezogenen Halbmesserstrecke senkrecht und heifst eine Berührungsebene der Fläche.

Ist nun

$$\varrho^2 - 2\mu|\varrho = c^2$$

die Gleichung der Fläche, ϱ Fahrstrahl des Berührungspunktes, τ derjenige eines beliebigen Punktes der Berührungsebene, so ist $(\varrho - \mu)$ die Radialstrecke nach dem Berührungspunkte und $(\tau - \varrho)$ senkrecht zu dieser Strecke. Mithin ist

$$(\tau - \varrho)|(\varrho - \mu) = 0$$

eine Gleichung der Tangentialebene im Punkte $(O + \varrho)$ der Fläche.

Nehmen wir

$$\varrho = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3, \quad \mu = m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2 + m_3\varepsilon_3,$$
$$\tau = x_1\varepsilon_1 + y_1\varepsilon_2 + z_1\varepsilon_3,$$

so erhalten wir

$$\{(x_1 - x)\varepsilon_1 + (y_1 - y)\varepsilon_2 + (z_1 - z)\varepsilon_3\} \times$$
$$|\{(x - m_1)\varepsilon_1 + (y - m_2)\varepsilon_2 + (z - m_3)\varepsilon_3\} = 0,$$

woraus

$$(x_1 - x)(x - m_1) + (y_1 - y)(y - m_2) + (z_1 - z)(z - m_3) = 0$$

als Gleichung der Berührungsebene in Cartesischen Koordinaten hervorgeht.

In dem Spezialfalle $\mu = 0$ erhalten wir für die Berührungsebene die einfachen Gleichungen

$$\varrho|\tau = a^2, \quad xx_1 + yy_1 + zz_1 = a^2.$$

7) Pol und Polarebene. Sei $\varrho^2 = a^2$ die Gleichung einer Kugelfläche, γ der Fahrstrahl $(P - M)$ eines Punktes P aufserhalb derselben. Denken wir uns durch diesen Punkt alle Tangentenebenen an die Fläche gelegt, ist ϱ der Fahrstrahl des Berührungspunktes einer solchen Ebene, so ist deren Gleichung

$$\varrho|\tau = a^2,$$

mithin, weil ihr auch γ genügen mufs,

$$\varrho|\gamma = a^2.$$

Das ist aber die Gleichung einer zu γ senkrechten Ebene. Demnach ist der Ort der Berührungspunkte aller Tangentenebenen eine Kreislinie, deren Ebene, die Polarebene, senkrecht auf dem Fahrstrahle des Punktes P, dem Pole, steht.

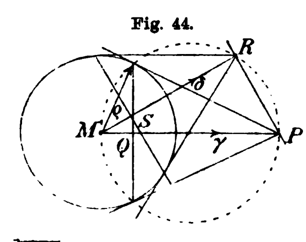
Ist M das Zentrum der Kugelfläche, Q der Fuſspunkt des Perpendikels von M auf die Polarebene, dann ist

$$\varrho|\gamma = \overline{MQ}|\overline{MP} = a^2,$$

womit der Abstand der Polarebene vom Kugelzentrum gegeben ist.

Die im Berührungspunkte einer Tangentenebene auf ihr senkrecht stehende gerade Linie heiſst die Normale der Kugelfläche daselbst.

Fig. 44.



Weil diese Linie mit dem Radius des Berührungspunktes zusammenfällt, so erhellt sofort, daſs sämtliche Normalen einer Kugelfläche in deren Zentrum sich schneiden.

Sei R ein beliebiger Punkt der über $\overline{MP}$ als Durchmesser beschriebenen Kugelfläche (Fig. 44), die durch P und R gehende, zu $\overline{MR} = \delta$ senkrechte Ebene Ort der Pole, dann ist

$$(\delta - \gamma)|\delta = 0, \quad \text{oder} \quad \delta|\gamma = d^2$$

die Gleichung dieser Ebene. Die Gleichung der Ebene der Berührungspunkte der Tangentenebenen durch P an die Fläche $\varrho^2 = a^2$ ist

$$\gamma|\tau = a^2,$$

welche sich ändert, wenn der Punkt P seine Ebene beschreibt. Setzen wir in ihr

$$\tau = \frac{a^2}{d^2}\delta,$$

so kommt

$$\delta|\gamma = d^2$$

zum Vorschein, mithin gehen die gesamten Polarebenen durch einen Punkt S der Geraden MR, für den

$$\overline{MR}|\overline{MS} = a^2$$

ist, wodurch wir zu dem Satze gelangen:

„Beschreibt ein Punkt eine Ebene, dann schneiden sich seine Polarebenen bezüglich einer Kugelfläche in einem Punkte, dem Pole der Ebene.“

Dritter Abschnitt.

Die Multiplikation im Elementarsysteme zweiter Stufe.

§ 24. Äufsere und innere Produkte aus Punktgröfsen. Der Operator | ist Verschiebungsfaktor.

Ein Elementarsystem zweiter Stufe ist der Inbegriff aller aus zwei Punkten als ursprünglichen Einheiten ableitbaren Punkte und Punktgröfsen, die durch diese beiden Punkte bestimmte gerade Punktreihe.

Stellen wir durch das äufsere Produkt der beiden relativen Einheiten E_1 und E_2 die absolute Einheit dar, dann ist

$$E_1 E_2 = 1\,, \quad E_2 E_1 = -1\,,$$

wodurch die absolute Einheit der durch die relativen Einheiten begrenzte Linienteil repräsentiert.

Mit $A = a_1 E_1 + a_2 E_2$, $B = b_1 E_1 + b_2 E_2$ erhalten wir

$$AB = (a_1 E_1 + a_2 E_2)(b_1 E_1 + b_2 E_2) = (a_1 b_2 - a_2 b_1) E_1 E_2\,,$$

$$AB = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

woraus folgt, dafs jeder Linienteil einer Zahl äquivalent ist.

Ferner bekommen wir

$$ABC = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} C,$$

d. h. es ist das Produkt aus drei Punkten, resp. Punktgröfsen ein Vielfaches des letzten Faktors.

Überhaupt ist das Produkt aus beliebig vielen Punkten eine Zahl, oder eine Punktgröfse, je nachdem die Anzahl der Faktoren des Produktes gerade, oder ungerade ist.

Die Einführung der Ergänzung giebt, indem wir an den Inhalt des ersten Abschnittes dieses Kapitels erinnern,

$$|E_1 = E_2\,, \quad |E_2 = -E_1\,,$$

$$E_1^2 = E_2^2 = 1.$$

$$A|B = (a_1 E_1 + a_2 E_2)(b_1 E_2 - b_2 E_1) = a_1 b_1 + a_2 b_2 = B|A.$$

$$A^2 = A|A = a_1^2 + a_2^2.$$

$$AB = a_1 b_2 - a_2 b_1 = |(AB),$$

$$|A|B = (a_1 E_2 - a_2 E_1)(b_1 E_2 - b_2 E_1) = a_1 b_2 - a_2 b_1\,,$$

$$AB = |(AB) = |A|B.$$

In diesem Systeme tritt der Ergänzungsstrich als Verschiebungsfaktor auf, er verwandelt E_1 in E_2, verschiebt den Punkt E_1 um die Strecke $(E_2 - E_1)$, den Punkt E_2 um die Strecke $(E_1 - E_2)$ und macht ihn aufserdem negativ.

Jede Punktgröfse wird um eine gewisse Strecke durch den Ergänzungsfaktor verschoben, sind A_1 und A_2 die Grundpunkte der Punktgröfsen A und $|A$, so ergiebt sich

$$A_2 - A_1 = \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1^2 - a_2^2}(E_2 - E_1).$$

Vierter Abschnitt.

Die Multiplikation im Elementarsysteme dritter Stufe.

§ 25. Produkte aus Punktgröfsen.

Weil jeder Punkt einer Ebene aus drei Punkten derselben, die in keiner Zahlbeziehung stehen, nicht in gerader Linie liegen, numerisch sich ableiten läfst, wählen wir als Einheit des Systemes das äufsere Produkt aus irgend drei solchen Punkten E_1, E_2, E_3 und setzen

$$E_1 E_2 E_3 = E_1(E_2 - E_1)(E_3 - E_1) = 1,$$

so dafs das Elementarsystem dritter Stufe drei ursprüngliche Einheiten, drei Einheiten zweiter Stufe, nämlich $E_1 E_2$, $E_2 E_3$ und $E_3 E_1$, und eine Einheit dritter Stufe enthält.

Durch diese Hypothese ergiebt sich, wenn wir

$$A = \sum_{k=1}^{k=3} a_k E_k, \quad B = \sum_{k=1}^{k=3} b_k E_k, \ \ldots$$

nehmen,

$$AB = \sum_{k=1}^{k=3} a_k E_k \sum_{k=1}^{k=3} b_k E_k = (a_1 b_2 - a_2 b_1) E_1 E_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) E_2 E_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) E_3 E_1,$$

$$ABC = \left(\sum_{k=1}^{k=3} a_k E_k \sum_{k=1}^{k=3} b_k E_k\right) \sum_{k=1}^{k=3} c_k E_k,$$

$$ABC = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} (E_1 E_2 E_3) = m(E_1 E_2 E_3) = m,$$

$$ABCD = (ABC)D = mD = m\sum_{k=1}^{k=3} d_k E_k,$$
$$ABCDE = (ABC)(DE) = m(DE),$$

und so fort.

Das (äufsere) Produkt aus zwei Punkten, resp. Punktgröfsen ist ein Linienteil, eine Vielfachensumme der Einheiten zweiter Stufe, dasjenige aus drei Punkten ist ein Vielfaches der Einheit des Systemes, eine Zahl, dasjenige aus vier Punkten ist eine Punktgröfse, ein Vielfaches des letzten Faktors, u. s. f.

Die Stufenzahl des Produktes aus beliebig vielen Gröfsen ersten Grades ist gleich dem verbleibenden Reste, wenn wir die Summe der Stufenzahlen der Faktoren, die mit der Anzahl der Faktoren übereinstimmt, durch die Stufenzahl drei des Hauptgebietes teilen.

§ 26. Einführung des Begriffes der Ergänzung.

Ist E das äufsere Produkt aus irgend einer Anzahl relativer Einheiten, E' dasjenige aus den übrigen ursprünglichen Einheiten des Systemes, dann ist

$$|E = (EE')E',$$

womit wir erhalten

$$|E_1 = E_2E_3, \quad |E_2 = E_3E_1, \quad |E_3 = E_1E_2,$$
$$|(E_2E_3) = E_1, \quad |(E_3E_1) = E_2, \quad |(E_1E_2) = E_3.$$
$$|(E_1E_2E_3) = E_1E_2E_3, \quad |1 = 1.$$

Die Ergänzung einer relativen Einheit ist eine Einheit zweiter Stufe, der ihr gegenüber liegende Fundamentallinienteil. Die Ergänzung einer Einheit zweiter Stufe ist dem ihr gegenüber liegenden Fundamentalpunkte gleich. Die Ergänzung der Einheit des Systemes, resp. der absoluten Einheit ist äquivalent dieser Einheit.

Weil die Beziehungen existieren

$$E_1(E_2E_3) = 1, \quad E_2(E_3E_1) = 1, \quad E_3(E_1E_2) = 1,$$
$$(E_1E_2)E_3 = 1, \quad (E_2E_3)E_1 = 1, \quad (E_3E_1)E_2 = 1,$$

so erhalten wir

$$E_1|E_1 = E_1^2 = 1, \quad E_2|E_2 = E_2^2 = 1, \quad E_3|E_3 = E_3^2 = 1,$$
$$(E_1E_2)|(E_1E_2) = (E_1E_2)^2 = 1, \quad (E_2E_3)^2 = 1, \quad (E_3E_1)^2 = 1,$$

und überdies ist

$$(E_1 E_2 E_3)^2 = (E_1 E_2 E_3) | (E_1 E_2 E_3) = 1.$$

Das innere Quadrat einer jeden Einheit ist der Einheit des Systemes, resp. der absoluten Einheit gleich.

Aus den Gleichungen

$$|E_1 = E_2 E_3, \qquad |(E_2 E_3) = E_1$$

folgt

$$|^2 E_1 = |(E_2 E_3) = E_1, \quad |^2(E_2 E_3) = |E_1 = E_2 E_3,$$
$$|^3 E_1 = |E_1 = E_2 E_3, \quad |^3(E_2 E_3) = |(E_2 E_3) = E_1,$$
$$|^4 E_1 = |(E_2 E_3) = E_1, \quad |^4(E_2 E_3) = |E_1 = E_2 E_3.$$

Der Ergänzungsstrich als Operator ist ein Verwandlungsfaktor, er verwandelt einen Fundamentalpunkt in einen Fundamentallinienteil und eine Einheit zweiter Stufe in eine solche erster Stufe.

Die *n*fache Ergänzung eines Fundamentalpunktes, oder eines Fundamentallinienteiles ist ihm selbst äquivalent, wenn *n* eine gerade Zahl ist, im anderen Falle ist sie eine Einheit zweiter, oder eine solche erster Stufe.

Weil der Ergänzungsstrich nur auf eine geometrische Gröfse wirkt, so ergiebt sich, wenn wir haben

$$A = a_1 E_1, \qquad \mathfrak{A} = a_1 (E_2 E_3),$$
$$|A = a_1 |E_1 = a_1 (E_2 E_3) = \mathfrak{A}, \quad |\mathfrak{A} = a_1 |(E_2 E_3) = a_1 E_1 = A,$$
$$|^2 A = a_1 |(E_2 E_3) = a_1 E_1 = A, \quad |^2 \mathfrak{A} = a_1 |E_1 = a_1 (E_2 E_3) = \mathfrak{A},$$

und weil E_1, E_2, E_3 beliebige Punkte der Ebene mit der alleinigen Beschränkung, dafs sie in keiner Zahlbeziehung stehen, sind, so resultiert der Satz:

Die Ergänzung einer Gröfse ersten Grades ist ein Linienteil, diejenige eines Linienteiles ein Punkt. Die zweifache Ergänzung einer Gröfse ersten und einer solchen zweiten Grades ist äquivalent dieser Gröfse.

Die Stufenzahl der Ergänzung eines dem Hauptgebiete untergeordneten Gebietes ist gleich dem Unterschiede aus der Stufenzahl des Hauptgebietes und derjenigen dieses untergeordneten Gebietes.

Sind die Gröfsen A und B aus den relativen Einheiten E_1, E_2, E_3 numerisch abgeleitet, ist

$$A = a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3, \quad B = b_1 E_1 + b_2 E_2 + b_3 E_3,$$

so erhalten wir

$$|A = |(a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3) = a_1|E_1 + a_2|E_2 + a_3|E_3,$$

$$|A = a_1E_2E_3 + a_2E_3E_1 + a_3E_1E_2,$$

$$|^2A = a_1|(E_2E_3) + a_2|(E_3E_1) + a_3|(E_1E_2),$$

$$|^2A = a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3 = A,$$

ferner ergiebt sich

$$AB = (a_1b_2 - a_2b_1)E_1E_2 + (a_2b_3 - a_3b_2)E_2E_3 + (a_3b_1 - a_1b_3)E_3E_1$$
$$= m_{1,2}E_1E_2 + m_{2,3}E_2E_3 + m_{3,1}E_3E_1,$$

$$|(AB) = m_{1,2}|(E_1E_2) + m_{2,3}|(E_2E_3) + m_{3,1}|(E_3E_1)$$
$$= m_{1,2}E_3 + m_{2,3}E_1 + m_{3,1}E_2,$$

$$|^2(AB) = m_{1,2}E_1E_2 + m_{2,3}E_2E_3 + m_{3,1}E_3E_1 = AB.$$

Dadurch erscheinen die Ergänzungen einer Gröfse ersten und zweiten Grades als Vielfachensummen der Einheiten.

§ 27. **Das innere Produkt aus zwei Gröfsen ersten und dasjenige aus zwei Gröfsen zweiten Grades.**

Nehmen wir $|B = CD$, so bekommen wir zunächst

$$A|B = A(CD) = (CD)A = |BA.$$

Ferner erhalten wir

$$A|B = \sum_{k=1}^{k=3} a_k E_k \sum_{k=1}^{k=3} b_k|E_k = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

$$B|A = \sum_{k=1}^{k=3} b_k E_k \sum_{k=1}^{k=3} a_k|E_k = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

d. h. $\quad A|B = B|A.$

Mit $B = A$ ergiebt sich

$$A|A = A^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

ist $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, A eine Punktgröfse vom Gewichte Null, dann ist $a_3 = -(a_1 + a_2)$, daher

$$A^2 = 2(a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2).$$

Weiter ergiebt sich

$$(AB)|(CD) = (m_{1,2}E_1E_2 + m_{2,3}E_2E_3 + m_{3,1}E_3E_1)$$
$$\times (n_{1,2}E_3 + n_{2,3}E_1 + n_{3,1}E_2)$$

$$(AB)|(CD) = m_{1,2}n_{1,2} + m_{2,3}n_{2,3} + m_{3,1}n_{3,1} = (CD)|(AB).$$

Mit $(CD) = (AB)$ bekommen wir

$$(AB)^2 = m_{1,2}^2 + m_{2,3}^2 + m_{3,1}^2.$$

Die Faktoren des inneren Produktes aus zwei Gröfsen ersten oder zweiten Grades sind ohne Zeichenwechsel vertauschbar, sein Wert und derjenige des inneren Quadrates einer solchen Gröfse ist stets eine reelle Zahl.

§ 28. Das äufsere Produkt aus Einheiten beliebiger Stufe.

Zu dem Werte des äufseren Produktes aus zwei beliebigen Einheiten gelangen wir durch eine der in § 16 für die Einheiten des Raumes als System dritter Stufe ganz gleiche Betrachtung. Wir haben nur die dortigen relativen Streckeneinheiten durch die relativen Punkteinheiten zu ersetzen. Das Endergebnis lautet, wenn E und E' zwei beliebige Einheiten unseres Elementarsystemes sind,

$$|(EE') = |E|E', \quad (EE') = |(|E|E').$$

Die Ergänzung des äufseren Produktes aus zwei beliebigen Einheiten ist gleich dem äufseren Produkte aus den Ergänzungen dieser Einheiten. Das äufsere Produkt aus zwei beliebigen Einheiten ist äquivalent der Ergänzung des äufseren Produktes aus den Ergänzungen dieser Einheiten.

Durch diesen Fundamentalsatz ergiebt sich unmittelbar

$$E_1(E_2E_3) = |(E_2E_3)|E_1 = |(E_2E_3E_1) = E_1E_2E_3 = 1,$$
$$E_1(E_3E_1) = |(E_2E_3)|E_2 = |(E_2E_3E_2) = 0;$$
$$(E_1E_2)(E_2E_3) = |E_3|E_1 = |(E_3E_1) = E_2 = (E_1E_2E_3)E_2,$$
$$(E_2E_3)(E_3E_1) = |E_1|E_2 = |(E_1E_2) = E_3 = (E_1E_2E_3)E_3,$$
$$(E_3E_1)(E_1E_2) = |E_2|E_3 = |(E_2E_3) = E_1 = (E_1E_2E_3)E_1,$$
$$(E_1E_2)(E_1E_2) = |E_3|E_3 = |(E_3E_3) = 0.$$

Das Produkt aus zwei (verschiedenen) Einheiten zweiter Stufe ist regressiv und ihrem gemeinsamen Elemente gleich, dasjenige aus einer solchen Einheit und ihr selbst verschwindet.

§ 29. Die Ergänzung des äufseren Produktes aus zwei Gröfsen ersten Grades.

Der obige Fundamentalsatz gilt auch für die Gröfsen ersten Grades. Wir erhalten

$$|A|B = \sum_{k=1}^{k=3} a_k|E_k \sum_{k=1}^{k=3} b_k|E_k = m_{1,2}E_3 + m_{2,3}E_1 + m_{3,1}E_2,$$

und weil dieses Resultat gleich $|(AB)$ ist, so folgt

$$|(AB) = |A|B.$$

Die Ergänzung des Produktes aus zwei Gröfsen ersten Grades ist dem Produkte aus den Ergänzungen seiner Faktoren gleich.

§ 30. Produkte aus Linienteilen.

Setzen wir in der Gleichung

$$(E_1E_2)(E_2E_3) = (E_1E_2E_3)E_2$$

auf ihrer linken Seite an die Stelle von E_2 die aus sämtlichen relativen Einheiten abgeleitete Gröfse B, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
&[E_1(b_1E_1 + b_2E_2 + b_3E_3)]\,[(b_1E_1 + b_2E_2 + b_3E_3)E_3] \\
&= (b_2E_1E_2 + b_3E_1E_3)(b_1E_1E_3 + b_2E_2E_3) \\
&= b_2(b_1E_1 + b_2E_2 + b_3E_3) \\
&= [E_1(b_1E_1 + b_2E_2 + b_3E_3)E_3](b_1E_1 + b_2E_2 + b_3E_3),
\end{aligned}$$

folglich ist

$$(E_1B)(BE_3) = (E_1BE_3)B.$$

Dasselbe Resultat ergiebt sich aber auch unmittelbar, wenn wir bedenken, dafs die Fundamentalpunkte beliebige Punkte der Ebene sind. Daraus schliefsen wir, dafs ganz allgemein

$$(AB)(BC) = (ABC)B$$

ist, dafs die zwischen den relativen Einheiten des Systemes bestehenden Relationen auch für Gröfsen ersten Grades gelten.

Weil ein Linienteil seinen Wert nicht ändert, wenn er beliebig auf seinem Träger verschoben wird, so liefert die letzte Formel, indem wir ein Produkt aus beliebigen Gröfsen im Elementarsysteme dritter Stufe ein planimetrisches Produkt nennen, den Satz:

Das planimetrische Produkt aus zwei Linienteilen ist ein Vielfaches des Schnittpunktes ihrer Träger.

Infolge der letzten Gleichung, oder wenn wir auf die entsprechenden Einheitenprodukte zurückgreifen, ergiebt sich

$$(AB)(CA) = \quad (BA)(AC) = \quad (BAC)A = -(ABC)A,$$
$$(BA)(CA) = -(BA)(AC) = -(BAC)A = (ABC)A,$$

und so fort.

Sind AB und CD zwei parallele Linienteile, so ergiebt sich für das Produkt aus ihnen, wenn wir bedenken, dafs die Strecken dieser Linienteile gleichartig sind, $(D-C) = m(B-A)$ ist,

$$(AB)(CD) = [A(B-A)][C(D-C)] = m[A(B-A)][C(B-A)],$$

und weil $(B-A)$ eine Gröfse ersten Grades vom Gewichte Null ist, so folgt

$$(AB)(CD) = -[mA(B-A)C](B-A) = -[A(D-C)C](B-A),$$

mithin ergiebt sich

$$(AB)(CD) = (ACD)(B-A).$$

Das planimetrische Produkt aus zwei parallelen Linienteilen AB und CD ist eine zu ihnen parallele Strecke, welche sich zu der Strecke $(B-A)$ algebraisch wie das Spatheck der Punkte A, C und D zur Einheit verhält.

Seien AB, BC und CA die Faktoren eines planimetrischen Produktes, welche mit den Seiten des Dreiecks der Punkte A, B und C zusammenfallen. — Für dasselbe erhalten wir

$$(AB)(BC)(CA) = [(AB)(BC)](CA) = (ABC)BCA = (ABC)(ABC)$$
$$= (ABC)^2.$$

Das planimetrische Produkt aus drei, die Seiten eines Dreiecks bildenden Linienteilen ist dem vierfachen Quadrate der Flächenzahl dieses Dreiecks gleich.

Es sind AB, AC und AD drei Linienteile mit dem gemeinsamen Elemente A, für das Produkt aus ihnen ergiebt sich

$$(AB)(AC)(AD) = [(AB)(AC)](AD) = (ABC)AAD,$$

mithin ist

$$(AB)(AC)(AD) = 0,$$

und weil Linienteile auf ihren Trägern beliebig verschoben werden können, ohne dafs dadurch eine Wertänderung derselben eintritt, so resultiert der Satz:

Das planimetrische Produkt aus drei Linienteilen auf in einem Punkte sich schneidenden Trägern verschwindet.

§ 31. Das Produkt aus zwei Linienteilen und einem Punkte.

Seien AB und AC zwei ungleichartige Linienteile und sei D ein nicht mit den Trägern dieser Linienteile zusammenfallender Punkt, dann ist

$$(AB)(AC)D = (ABC)AD = mAD,$$
$$(AB)D(AC) = (ABD)AC = nAC,$$
$$D(AB)(AC) = (DAB)AC = nAC.$$

§ 32. Innere Produkte.

Für das innere Produkt aus den Linienteilen AB und CD ergab sich

$$(AB)|(CD) = (CD)|(AB).$$

Auf demselben Wege wie für das innere Produkt aus zwei Feldern, § 19, finden wir, dafs auch

$$(AB)|(CD) = \begin{vmatrix} A|C & B|C \\ A|D & B|D \end{vmatrix}.$$

Damit dieses Produkt verschwinde, müssen A, B und $F = |(CD)$ in einer Zahlbeziehung stehen, mufs

$$|(CD) = F = aA + bB, \quad CD = a|A + b|B$$

sein, oder die vorstehende Determinante den Wert Null besitzen.

Mit $CD = AB$ ergiebt sich

$$(AB)^2 = A^2B^2 - (A|B)^2.$$

Für das innere Produkt aus einem Linienteile und einem Punkte erhalten wir, wenn wir $(AB) = |F$ setzen,

$$(AB)|C = |F|C = |(FC) = -|C|F = -|C(AB),$$
$$(AB)|C = |(FC) = G,$$
$$C|(AB) = CF = -FC = -|(AB)C.$$

Das innere Produkt aus einem Linienteile und eines aufserhalb seines Trägers gelegenen Punktes ist ein Punkt, dasjenige aus einem Punkte und einem Linienteile ein Linienteil. Die Faktoren dieser äufseren Produkte sind nur mit Zeichenwechsel vertauschbar.

§ 33. Das planimetrische Produkt aus zwei Gröfsen dritter Stufe.

Genau auf demselben Wege wie für das äufsere Produkt aus zwei Spathen, § 20, finden wir

$$(A_1A_2A_3)(B_1B_2B_3) = \begin{vmatrix} A_1|B_1 & A_2|B_1 & A_3|B_1 \\ A_1|B_2 & A_2|B_2 & A_3|B_2 \\ A_1|B_3 & A_2|B_3 & A_3|B_3 \end{vmatrix}.$$

Sämtliche in § 20 für Gröfsen im Gebiete des Raumes als von dritter Stufe entwickelten Produktformeln lassen sich unmittelbar auf das Gebiet der Ebene als Elementarsystem dritter Stufe übertragen, wir haben lediglich an Stelle der dortigen Strecken Punkte zu substituieren und den Wortlaut der dortigen Sätze entsprechend zu ändern.

§ 34. **Mehrfaktorige planimetrische Produkte.**

Ein planimetrisches Produkt ist ein Produkt aus Punkten und Linienteilen in der Ebene als Elementarsystem dritter Stufe unter der Annahme $E_1E_2E_3 = 1$.

Ein solches Produkt bezeichnet Grafsmann mit $\mathfrak{P}$.

Sei

$$\mathfrak{P} = UA\beta C\delta E\ldots$$

ein planimetrisches Produkt, in welchem auf einen Punkt abwechselnd Punkte und Linienteile in der Weise folgen, dafs keine zwei benachbarten Faktoren inzident sind.

Die Auswertung eines solchen Produktes ist in der Weise zu bewirken, dafs wir mit der Verknüpfung der Faktoren von links nach rechts fortschreiten, wodurch wir erhalten:

$UA = \alpha =$ dem durch die Punkte U und A bestimmten Linienteile,

$UA\beta = \alpha\beta = mS =$ einem Vielfachen des Schnittpunktes S der Träger der Linienteile α und β,

$UA\beta C = mSC = m\sigma =$ einem Vielfachen des durch die Punkte S und C bestimmten Linienteiles,

$UA\beta C\delta = m\sigma\delta = mnT =$ einem Vielfachen des Schnittpunktes der Träger der Linienteile σ und δ,

und so fort.

Setzen wir $UA = \zeta$, dann wird

$$\mathfrak{P} = \zeta\beta C\delta E\ldots$$

und ebenso wie vorhin ergiebt sich

$$\mathfrak{P} = \zeta\beta C\delta = mnT.$$

Folgen in einem planimetrischen Produkte auf einen Punkt abwechselnd Punkte und Linienteile, oder auf einen

Linienteil abwechselnd Linienteile und Punkte, und sind zwei benachbarte Faktoren desselben nicht inzident, so ist sein Wert stets von Null verschieden.

Ist in einem planimetrischen Produkte die Summe der Stufenzahlen seiner Faktoren gleich oder kleiner als die Stufenzahl drei des Hauptgebietes, so ist es rein progressiv, denn in diesem Falle ist jeder Faktor mit dem vorhergehenden durch progressive Multiplikation verbunden. Das Ergebnis der Verknüpfung ist dann stets eine Gröfse, deren Stufenzahl gleich der Summe der Stufenzahlen der Faktoren ist. Teilen wir diese Summe durch die Stufenzahl des Hauptgebietes, dann giebt der verbleibende Rest die Stufenzahl des Ergebnisses. Übersteigt die Summe der Stufenzahlen der Faktoren die Stufenzahl des Hauptgebietes, dann ist das Produkt regressiv, denn es ist dann nicht mehr die Summe der Stufenzahlen seiner Faktoren gleich der Stufenzahl des Ergebnisses, diese liegt vielmehr stets zwischen 1 und 3 in der Weise, dafs wenn 4, 5, 6, 7, 8, 9 ... die Summen der Stufenzahlen der Faktoren sind, das Ergebnis die Stufenzahlen 1, 2, 3, 1, 2, 3 ... aufweist. Dadurch läfst sich die Wertbeschaffenheit eines jeden planimetrischen Produktes mit Hülfe der Stufenzahlen seiner Faktoren angeben.

Die Stufenzahl eines planimetrischen Produktes ist gleich dem verbleibenden Reste, wenn wir die Summe der Stufenzahlen seiner Faktoren durch die Stufenzahl des Hauptgebietes dividieren, indem eine Gröfse dritter Stufe als Zahl von nullter Stufe ist.

Beispielsweise ist

$$\mathfrak{P} = A\beta C\delta\varepsilon = \text{einem Linienteile,}$$

denn es ist die Summe der Stufenzahlen der Faktoren dieses Produktes gleich $1 + 2 + 1 + 2 + 2 = 8$ und $8 : 3 = 2 + \frac{2}{3}$, der Divisionsrest gleich 2, mithin das Ergebnis ein Linienteil.

Das zu einem Produkte von m progressiven Faktoren gehörende regressive Produkt ist gleich dem Produkte aus den Ergänzungen seiner Faktoren, es ist rein regressiv, denn jeder Faktor ist mit dem vorhergehenden durch regressive Multiplikation verbunden.

Das dem Produkt AB entsprechende regressive Produkt ist mit $|A = \alpha$, $|B = \beta$ gleich $\alpha\beta$, die Stufenzahl des ersten Produktes ist gleich 2, diejenige des zweiten Produktes gleich 1, letztere wird ebenso wie die des ursprünglichen Produktes erhalten.

Weil die Stufenzahl der Ergänzung einer Gröfse gleich dem Unter-

schiede aus den Stufenzahlen des Hauptgebietes und dieser Gröfse ist, so ergiebt sich die Summe der Stufenzahlen der Faktoren des regressiven Produktes dadurch, dafs wir die Summe der Stufenzahlen der Faktoren des progressiven Produktes von $3m$ abziehen. Ist für das ursprüngliche Produkt diese Summe gleich oder kleiner als 3, dann ist die Summe der Stufenzahlen der Faktoren des neuen Produktes gleich oder gröfser als $(3m - 3)$. Bei fortschreitender Multiplikation läfst sich jede der dabei auftretenden Gruppe von Einheiten dritter Stufe auf die Form $(E_1 E_2 E_3)$ bringen und dieser Faktor gleich 1 setzen, so dafs das Produkt selbst nur von nullter, resp. dritter, zweiter oder erster Stufe sein kann.

Ist die Summe der Stufenzahlen eines planimetrischen Produktes von m Faktoren gröfser als 3 und kleiner als $(3m - 3)$, dann heifst dasselbe ein gemischtes Produkt, denn dann sind seine Faktoren teils durch progressive, teils durch regressive Multiplikation miteinander verbunden.

Bestimmen wir die Wertbeschaffenheit eines planimetrischen Produktes durch successive Multiplikation, dann bleibt schliefslich ein dreifaktoriges Produkt übrig. Insbesondere verschwindet dieses Produkt, wenn es aus drei in gerader Linie liegenden Punkten, oder aus drei Linienteilen, deren Träger in einem Punkte sich schneiden, besteht.

§ 35. **Planimetrische Produkte aus Punkten und Linien.**

Kommt es bei einem planimetrischen Produkte nur auf dessen Wertbeschaffenheit, nur darauf an, ob dasselbe einen Punkt, einen Linienteil oder eine Zahl darstellt, dann entscheiden wir solches stets mittelst der Stufenzahlen seiner Faktoren. Ist die Untersuchung unabhängig von der Gröfse des Ergebnisses, dann lassen sich an die Stelle der Linienteilfaktoren ihre Träger, ihre Linien setzen. — Umgekehrt können wir ein planimetrisches Produkt aus Punkten und Linien konstruieren, wenn nur solche Gröfsen in Frage kommen. Im letzteren Falle bedeutet das Produkt:

AB die durch die Punkte A und B bestimmte gerade Punktreihe,

$\alpha\beta$ den Schnittpunkt der Geraden α und β,

$A\beta$ oder βA die durch den Punkt A und die Gerade β gehende Ebene, eine gewisse Zahl, wobei A nicht in β liegt und das Produkt nur verschwindet, wenn es mit einer Gröfse, welche gleich Null ist, multipliziert wird.

Zwei Gröfsen A und Γ nennen wir kongruent, wenn zwischen ihnen die Beziehung $\mathsf{A} = n\Gamma$ besteht, unter n irgend eine reelle, von Null verschiedene Zahl verstanden, und setzen, um diese Kongruenz auszudrücken $\mathsf{A} \equiv \Gamma$, lesen A kongruent Γ.

Zwei extensive (geometrische) Gröfsen sind kongruent, wenn zwischen ihnen eine Zahlbeziehung besteht und keine von beiden gleich Null ist.

Z. B. bedeutet $A \equiv B$, dafs die Punkte A und B demselben Punktgebiete angehören, $AB \equiv CD$, dafs diese Linienteile auf dem nämlichen Träger liegen, dafs resp. diese Linien zusammenfallen, $ABC \equiv DEF$, dafs diese Flächenteile derselben Ebene angehören.

Setzen wir in dem planimetrischen Produkte $\mathsf{A}\Gamma$, in welchem A und Γ einfache Faktoren bedeuten sollen, an die Stelle von Γ die Gröfse $n\Gamma$, dann ist

$$\mathsf{A}(n\Gamma) = n\mathsf{A}\Gamma,$$

also ist

$$\mathsf{A}\Gamma \equiv n\mathsf{A}\Gamma \equiv \mathsf{A}(n\Gamma).$$

Ein planimetrisches Produkt bleibt sich selbst kongruent, wenn wir an die Stelle irgend eines seiner Faktoren einen diesem Faktor kongruenten Faktor setzen.

Ein planimetrisches Produkt nullter Stufe ist ein solches, bei dem die Summe der Stufenzahlen seiner Faktoren durch die Stufenzahl des Hauptgebietes ohne Rest teilbar ist, dessen Wert durch eine reelle Zahl repräsentiert wird. Ein solches Produkt ist mithin dann nur einem anderen kongruent, wenn entweder beide Produkte zugleich Null, oder beide gleichzeitig von Null verschieden sind. Setzen wir also in einem Produkte nullter Stufe an die Stelle eines beliebigen Faktors einen ihm kongruenten Faktor, dann bleibt dasselbe gleich Null, wenn es ursprünglich Null war, von Null verschieden, wenn sein Wert von Null verschieden war.

Ein planimetrisches Produkt aus zwei Faktoren bleibt sich selbst kongruent, wenn wir seine Faktoren miteinander vertauschen.

Es ist $AB = -BA$, daher $AB \equiv BA$,

" $A\beta = \beta A$, " $A\beta \equiv \beta A$,

" $\alpha\beta = -\beta\alpha$, " $\alpha\beta \equiv \beta\alpha$.

Ein planimetrisches Produkt aus drei Punkten oder aus drei Linien bleibt sich selbst kongruent, wenn wir seine Faktoren beliebig ordnen oder zusammenfassen.

Denn jedes dieser Produkte bleibt ein Produkt nullter Stufe, gleichviel wie wir seine Faktoren ordnen.

Besteht ein planimetrisches Produkt aus den beiden Faktoren

$$\mathsf{A} = A\alpha\beta C\delta \ldots, \quad \mathsf{B} = \alpha_1\gamma_1 D_1 \varepsilon_1 \ldots,$$

dann ist

$$\mathsf{AB} \equiv \mathsf{BA}.$$

Denn die Stufenzahlen der Faktoren A und B sind entweder 1, oder 2, oder 3, wobei die letztere nicht in Betracht kommt, da dann einer der beiden Faktoren eine Zahl bedeutet, und die anderen Fälle wurden soeben erledigt.

Ein planimetrisches Produkt nullter Stufe bleibt sich selbst kongruent, wenn wir die Ordnung seiner Faktoren umkehren, oder beliebig viele letzte Faktoren in eine Klammer schliefsen und dann umkehren.

Ist

$$\mathfrak{P} = A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_{n-2} A_{n-1} A_n$$

ein solches Produkt, dann ist die Summe der Stufenzahlen seiner Faktoren durch 3 ohne Rest teilbar. Setzen wir nun

$$\mathfrak{P} = (A_1 A_2 A_3 \ldots A_{n-2} A_{n-1}) A_n = P A_n,$$

so ist, weil PA_n eine Zahl bedeutet, $PA_n \equiv A_n P$, folglich ist

$$A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_{n-1} A_n \equiv A_n (A_1 A_2 \ldots\ldots A_{n-2} A_{n-1}).$$

Setzen wir weiter

$$A_n (A_1 A_2 \ldots A_{n-2}) A_{n-1} = A_n P_1 A_{n-1},$$

dann bedeutet das Produkt $A_n P_1 A_{n-1}$ eine Zahl, mithin ist

$$A_n P_1 A_{n-1} \equiv A_n A_{n-1} P_1,$$

daher besteht die Relation

$$A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_{n-1} A_n \equiv A_n A_{n-1} (A_1 A_2 \ldots\ldots A_{n-2}),$$

und wenn wir in dieser Weise fortfahren, so gelangen wir schliefslich zu

$$A_1 A_2 \ldots\ldots A_{n-1} A_n \equiv A_n A_{n-1} \ldots\ldots A_2 A_1.$$

Nun ist ferner

$$\begin{aligned} A_1 A_2 \ldots\ldots A_{n-1} A_n &\equiv (A_n A_{n-1} \ldots\ldots A_3 A_2) A_1 \\ &\equiv A_1 (A_n A_{n-1} \ldots A_3 A_2). \end{aligned}$$

Damit ist der obige Satz bewiesen.

Von besonderer Wichtigkeit sind diejenigen planimetrischen Produkte nullter Stufe, deren Wert gleich Null ist.

Die Gleichung

$$ABC = 0$$

sagt aus, dafs die Punkte A, B und C in gerader Linie liegen.

Die Gleichung

$$A\beta = 0, \quad \text{oder} \quad \beta A = 0$$

thut dar, dafs der Punkt A in der Linie β liegt, die Linie β durch den Punkt A hindurchgeht.

Die Gleichung

$$\alpha\beta\gamma = 0$$

drückt aus, dafs die Linien α, β und γ in einem Punkte sich schneiden.

Infolge des zuletzt für planimetrische Produkte nullter Stufe bewiesenen Satzes läfst sich, weil alle für planimetrische Produkte nullter Stufe angeführten Sätze auch jetzt noch gelten, jedes der in Rede stehenden Produkte umkehren, es ist, wenn

$$AB\delta E\zeta FG = 0$$

ist, auch

$$GF\zeta E\delta BA = 0.$$

Unter den unendlich vielen planimetrischen Produkten höherer als nullter Stufe und deren Wert äquivalent Null ist, verdienen zwei der besonderen Erwähnung.

Das erste dieser Produkte ist

$$AB\delta = 0, \quad \text{wenn} \quad AB \gtrless 0 \text{ ist.}$$

Dann mufs die Linie AB mit der Linie δ zusammenfallen, d. h. es müssen die Punkte A und B der Linie δ angehören, so dafs unter den gegebenen Verhältnissen

$$A\delta = 0 \quad \text{und} \quad B\delta = 0$$

ist.

Die zweite Gleichung lautet

$$\alpha\beta C = 0, \quad \alpha\beta \gtrless 0.$$

Damit diese Gleichung befriedigt werde, mufs der Punkt C mit dem Punkte $(\alpha\beta)$, dem Schnittpunkte von α und β zusammenfallen, d. h. gleichzeitig in den Linien α und β liegen, wodurch die gegebene Gleichung in die zwei Gleichungen

$$\alpha C = 0 \quad \text{und} \quad \beta C = 0$$

zerfällt.

Schliefslich erwähnen wir noch das Produkt nullter Stufe

$$AH\beta CH = 0.$$

Dasselbe kann geschrieben werden

$$(AH)\beta(CH) = 0,$$

so dafs die drei Linien (AH), β und (CH) durch einen Punkt gehen müssen.

Unserer Gleichung können wir aber auch die Form geben

$$(AH\beta)CH = 0, \quad \text{oder} \quad PCH = 0$$

mit $P \equiv (AH\beta)$, d. h. es müssen die drei Punkte P, C und H einer geraden Punktreihe angehören. Aber der Punkt P liegt in der Geraden (AH), folglich mufs der Punkt C mit dieser Linie zusammenfallen.

Wenn also die Gleichung

$$AH\beta CH = 0$$

besteht, dann befindet sich entweder der Punkt H in der Linie β, oder der Punkt C in der Linie (AH).

§ 36. Punktreihen und Strahlenbüschel.

Die Gleichung

$$U\beta = 0, \quad \text{oder} \quad \beta U = 0$$

ist, mit U als variablem Punkte und β als fixer Linie, diejenige der Punktreihe β, und die Gleichung

$$ABU = 0$$

giebt die durch die Punkte A und B bestimmte gerade Punktreihe.

Ist A ein fester Punkt und durchwandert ein Punkt U die Ebene, so ist AU der Ausdruck für jeden durch den Punkt A gehenden Strahl ξ dieser Ebene, daher ist

$$\xi \equiv AU$$

die planimetrische Gleichung des Strahlenbüschels mit dem Mittelpunkte A.

Liegen insbesondere die Punkte U auf der Linie β, so ist

$$U \equiv \xi\beta \equiv AU\beta,$$

es ist diese Gleichung diejenige der Punktreihe β, welche zu dem Strahlenbüschel um A perspektivisch liegt, denn auf jedem Strahle des Büschels befindet sich ein Punkt der Punktreihe und jeder Strahl des Büschels geht durch einen Punkt dieser Reihe hindurch.

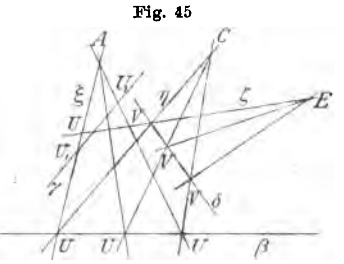
Nehmen wir einen Punkt C der Ebene, welcher nicht auf β liegt und nicht mit A zusammenfällt, als den Mitttelpunkt eines zweiten Strahlenbüschels an, dessen Strahlen η durch die Punkte U von β gehen,

dann ist, wenn wir die sich in demselben Punkte U schneidenden Strahlen der beiden Büschel einander zuordnen (Fig. 45), die planimetrische Gleichung des zweiten Strahlenbüschels

$$\eta \equiv UC \equiv AU\beta C \equiv UA\beta C.$$

Weil die Strahlenbüschel UA und $UA\beta C$ zu der Punktreihe $UA\beta$ perspektivisch liegen, so sagen wir, dafs sie in perspektivischer Lage seien und dafs die Gerade β ihr perspektivischer Durchschnitt sei.

Fig. 45



Multiplizieren wir die beiden Seiten der Kongruenz

$$UA\beta C \equiv UC$$

mit U, so folgt

$$UA\beta CU = 0 \qquad (1)$$

als planimetrische Gleichung für den Ort des Punktes U, des perspektivischen Durchschnittes der beiden Strahlenbüschel.

Nach dieser Gleichung müssen die Punkte $(UA\beta)$, C und U in gerader Linie liegen, was nur dann möglich ist, wenn

$$UA\beta \equiv U, \quad \text{oder} \quad UAC = 0$$

ist. Die erste dieser Gleichungen giebt, mit β multipliziert,

$$U\beta = 0,$$

d. h. der Punkt U mufs auf β liegen. Die zweite Gleichung sagt aus, dafs der Punkt U auf der Geraden der Punkte A und C sich bewegen mufs. Mithin zerfällt die Gleichung (1) in diejenigen zweier geraden Linien, von denen die erste den perspektivischen Schnitt giebt.

Legen wir durch die beiden Strahlenbüschel um A und C die beliebigen Geraden γ und δ, dann schneidet das erste Strahlenbüschel aus der Geraden γ die Punktreihe U_1, das zweite aus der Geraden δ die Punktreihe V heraus, es ist

$$U_1 \equiv \xi\gamma \equiv UA\gamma, \quad V \equiv \eta\delta \equiv UC\delta,$$
$$U \equiv \xi\beta \equiv UA\beta, \quad U \equiv \eta\beta \equiv UC\beta.$$

Entsprechende Punkte der Punktreihen U_1 und U, sowie V und U sind solche auf demselben Strahle ξ des ersten, sowie auf demselben Strahle η des zweiten Strahlenbüschels, weshalb wir sagen, dafs solche Punktreihen in perspektivischer Lage sich befinden. — Zwei Punktreihen sind mithin in perspektivischer Lage, wenn ihre Kongruenzen denselben, um den nämlichen Punkt rotierenden Strahl aufweisen.

Jedem Strahle $\eta \equiv (UA\beta C)$ entspricht ein Punkt $V \equiv (UA\beta C\delta)$ auf der Geraden δ. Daher entspricht dem Strahlenbüschel um C überhaupt die Gerade $(UA\beta C\delta)$ oder δ.

Weil die Punktreihen U_1 und U, sowie V und U zu einander perspektivisch liegen, sagen wir, dafs die Punktreihen U_1 und V in projektivischer Lage seien.

Im vorliegenden Spezialfalle ist

$$U_1 \equiv UA\gamma, \quad V \equiv UA\beta C\delta,$$

womit die projektivische Lage der Punktreihen U_1 und V durch planimetrische Produkte zum Ausdruck gebracht worden ist.

Ist E ein weiterer beliebiger Punkt der Ebene (Fig. 45) und ziehen wir die Strahlen $\zeta \equiv VE$, dann entsteht um den Punkt E als Zentrum ein drittes Strahlenbüschel. Jedem Strahle UA entspricht ein Punkt $UA\beta$ auf β, jedem Strahle UC ein bestimmter Punkt $UC\beta$ auf β, die Strahlen UA und UC, welche durch denselben Punkt von β gehen, sind entsprechende Strahlen der zu einander perspektivischen Strahlenbüschel um A und C. Jedem Strahle UC entspricht ein bestimmter Punkt V der Geraden δ, der Schnittpunkt beider,

$$V \equiv UA\beta C\delta.$$

Durch diesen Punkt geht ein Strahl des Strahlenbüschels um E, welcher den Strahlen UA und UC entspricht, es ist

$$\eta \equiv UA\beta C\delta E$$

die Gleichung des Strahlenbüschels um E, welcher mit dem Strahlenbüschel um C perspektivisch liegt, und weil die Strahlenbüschel um C und A in perspektischer Lage sich befinden, sagen wir, dafs die beiden Strahlenbüschel um A und E projektivische Strahlenbüschel seien.

In der vorstehenden planimetrischen Kongruenz folgen auf einen Punkt abwechselnd Punkte und Linien. Das Strahlenbüschel UA um A und die Punktreihe $UA\beta$ auf β, das Strahlenbüschel um A und das Strahlenbüschel $UA\beta C$ um C, die Punktreihen $UA\beta$ und $UA\beta C\delta$ sind in perspektivischer Lage, dahingegen befinden sich das Strahlenbüschel UA und die Punktreihe $UA\beta C\delta$, sowie dasselbe Büschel und das Strahlenbüschel $UA\beta C\delta E$ in projektivischer Lage, es sind A und C, β und δ durch je einen Faktor, aber A und E durch mehrere Faktoren voneinander getrennt, woraus der Satz resultiert:

Folgen in einem planimetrischen Produkte auf einen Punkt abwechselnd Punkte und Linien, enthält dasselbe ab-

wechselnd Strahlenbüschel und Punktreihen als Faktoren, dann sind zwei Faktoren perspektivisch, wenn sie durch einen Faktor voneinander getrennt sind, sonst projektivisch.

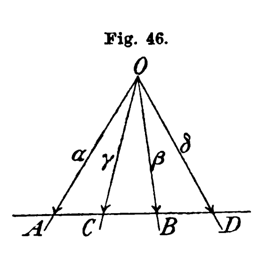


Fig. 46.

Seien A, B, C, D vier Punkte einer geraden Punktreihe, A und B, C und D konjugierte Punkte, sei O der Mittelpunkt eines dazu perspektivisch gelegenen Strahlenbüschels, $(A-O) = \alpha$, $(B-O) = \beta$, $(C-O) = \gamma$, $(D-O) = \delta$ (Fig. 46).

Unter m eine gewisse reelle Zahl verstanden, existiert die Beziehung

$$\frac{AC}{CB} = m\frac{AD}{DB}, \quad \text{oder} \quad \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = m.$$

Weil mit $AB = nEF$ die Gleichung besteht $OAB = nOEF$, so ist auch

$$\frac{OAC}{OCB} = m\frac{OAD}{ODB},$$

d. i.

$$\frac{O(A-O)(C-O)}{O(C-O)(B-O)} = m\frac{O(A-O)(D-O)}{O(D-O)(B-O)},$$

mithin

$$\frac{(A-O)(C-O)}{(C-O)(B-O)} = m\frac{(A-O)(D-O)}{(D-O)(B-O)},$$

oder

$$\frac{\alpha\gamma}{\gamma\beta} = m\frac{\alpha\delta}{\delta\beta},$$

und der Übergang von den Strecken zu den Zahlen giebt:

$$\frac{ac \sin(\alpha, \gamma)}{cb \sin(\gamma, \beta)} = m\frac{ad \sin(\alpha, \delta)}{db \sin(\delta, \beta)},$$

d. i.

$$\frac{\sin(\alpha, \gamma)}{\sin(\gamma, \beta)} : \frac{\sin(\alpha, \delta)}{\sin(\delta, \beta)} = m,$$

folglich erhalten wir

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{\sin(\alpha, \gamma)}{\sin(\gamma, \beta)} : \frac{\sin(\alpha, \delta)}{\sin(\delta, \beta)}.$$

„Die Doppelverhältnisse aus vier Punkten einer Punktreihe und den entsprechenden Strahlen eines dazu perspektischen Strahlenbüschels sind einander gleich.“

§ 37. Die Kurve zweiter Ordnung.

1) Die planimetrische Gleichung des zu dem Strahlenbüschel um A projektivischen Strahlenbüschels um E (Fig. 45, Seite 166) lautet

$$\zeta \equiv UA\beta C\delta E.$$

Je zwei entsprechende Strahlen ξ und ζ dieser beiden Büschel schneiden sich in einem Punkte. Die Gesamtheit aller dieser Punkte ist ein geometrisches Gebilde, welches wir Curve nennen. Ist U der Schnittpunkt entsprechender Strahlen ξ und ζ, dann ist

$$UA\beta C\delta E \equiv UE,$$

und multiplizieren wir die beiden Seiten dieser Kongruenz mit U, so folgt

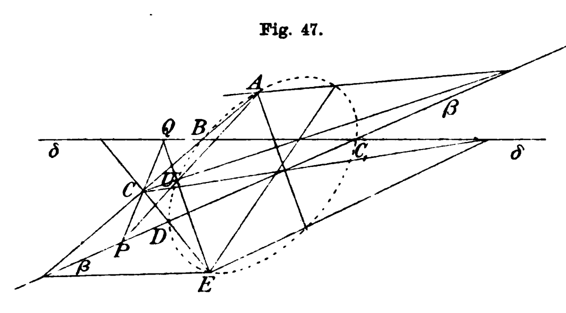
$$UA\beta C\delta E U = 0, \tag{1}$$

die planimetrische Gleichung des Ortes der Punkte U, des Erzeugnisses der beiden projektivischen Strahlenbüschel mit den Mittelpunkten A und E. Das in dieser Gleichung enthaltene planimetrische Produkt ist von nullter Stufe und der variable Punkt U tritt in ihr zweimal als Faktor auf.

Sei nun umgekehrt diese Gleichung gegeben und ihre Bedeutung zu untersuchen. Gegeben sind die Punkte A, C, E, die Geraden β und δ (Fig. 47), welch' letztere im Punkte C_1 sich schneiden.

Ziehen wir den beliebigen Strahl UA, so ist $UA\beta \equiv P$, weiter ist $UA\beta C$ gleich der durch P und C bestimmten Geraden PC, $(UA\beta C)\delta \equiv (PC)\delta \equiv Q$, $(UA\beta C\delta)E \equiv QE \equiv$ der durch Q und E bestimmten Geraden, $(UA\beta C\delta E)U \equiv QEU = 0$. Somit muss der Punkt U des Erzeugnisses auf den Strahlen UA und QE liegen, er ist der Schnittpunkt beider. Auf diese Weise ergeben sich beliebig viele Punkte der Kurve, es entstehen um die Punkte A, E und C Strahlenbüschel, die beiden ersteren sind perspektivisch zu dem Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkte C gelegen. Die Gerade β ist der perspektivische Schnitt der Strahlenbüschel um A und C, die Gerade δ derjenige der Büschel um E und C, demnach sind die beiden Strahlenbüschel um A und E projektivisch.

Fig. 47.



„Das durch die planimetrische Gleichung gegebene Gebilde ist das Erzeugnis zweier projektivischen Strahlenbüchel.“

Die Ecken P und Q des Dreiecks UPQ liegen stets auf den festen Geraden β und δ, seine Seitenlinien gehen durch die festen Punkte C, A und E.

„Das durch die Gleichung (1) gegebene Gebilde wird auch erzeugt durch den einen Eckpunkt eines veränderlichen Dreiecks, dessen beide anderen Eckpunkte auf festen Geraden fortrücken, während seine Seitenlinien um feste Punkte sich drehen."

Für unser planimetrisches Produkt nullter Stufe besteht die Beziehung

$$UA\beta C\delta EU = UE\delta C\beta AU = 0.$$

Mit $U = A$ wird $UA = 0$ und damit das ganze Produkt gleich Null, ebenso verschwindet dasselbe mit $U = E$, denn dann ist $UE = 0$ und damit der zweite Ausdruck gleich Null, d. h. A und E sind Punkte der Kurve. Ziehen wir als Strahl UA den Strahl AC_1 als Strahl des ersten Büschels und konstruieren

$$C_1 A\beta C\delta EU = 0,$$

so ergiebt sich $U = C_1$, daher ist der Schnittpunkt C_1 von β und δ ein weiterer Punkt der Kurve. Mit $UA \equiv CA$ ergiebt sich, indem wir

$$CA\beta C\delta EU = 0$$

konstruieren, $U \equiv (CA)\delta \equiv B$, und mit $UE = CE$ erhalten wir, wenn wir

$$CE\delta C\beta AU = 0$$

konstruieren, $U \equiv (CE)\beta \equiv D$. Daher sind auch B und D auf δ und β Punkte der Kurve. Jetzt ist $\beta \equiv C_1D$, $\delta \equiv C_1B$ und weitere besondere Punkte der Kurve liefert die planimetrische Gleichung nicht, nur fünf solche.

„Die Kurve ist durch fünf Punkte bestimmt."

Sind diese Punkte A, B, C_1, D und E gegeben, so wird mit $\beta \equiv C_1D$, $C \equiv (AB)(DE)$, $\delta \equiv BC_1$ die planimetrische Gleichung der Kurve

$$UA(C_1D)[(AB)(DE)](BC_1)EU = 0,$$

welche nur Punkte enthält.

Ist AR ein Strahl des Büschels um A, welcher nicht durch einen weiteren gegebenen Punkt hindurchgeht, dann können auf diesem Strahle aufser A noch mehrere Punkte der Kurve liegen, wofür die Gleichung

$$RA\beta C\delta EU = 0, \quad \text{oder} \quad (RA\beta C\delta E)U = 0$$

bestehen mufs. Daher mufs der Punkt U sowohl auf der Geraden (RA) als auch auf der Geraden $(RA\beta C\delta E)$ liegen, von denen die erstere nicht durch den Punkt E geht, der Schnittpunkt dieser Geraden sein. Der beliebige Strahl RA hat demnach nur zwei Punkte mit der Kurve gemein.

„Jede gerade Linie schneidet die Kurve in höchstens zwei Punkten, weshalb sie eine Kurve zweiter Ordnung genannt wird.“

„Das Erzeugnis zweier projectivischen Strahlenbüschel ist eine Kurve zweiter Ordnung. — Drehen sich die Seitenlinien eines veränderlichen Dreiecks um feste Punkte, während zwei seiner Ecken auf festen Geraden fortrücken, dann beschreibt seine dritte Ecke eine Kurve zweiter Ordnung.“

Die Gegenseiten des Sechsecks der Punkte A, B, C_1, D, E und U schneiden sich in den Punkten C, P und Q, welche stets in einer geraden Linie liegen. — Die Punktgleichung der Kurve läſst sich schreiben

$$[(UA)(C_1D)]\,[(AB)(DE)]\,[(BC_1)(EU)] = 0,$$

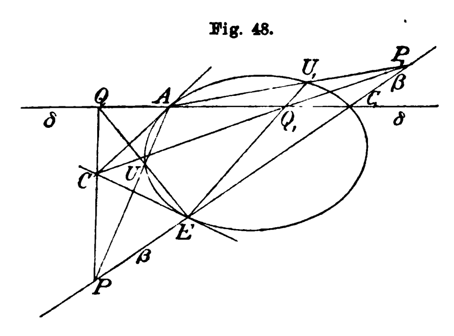
es ist

$$(UA)(C_1D) \equiv P, \quad (AB)(DE) \equiv C, \quad (BC_1)(EU) \equiv Q,$$

mithin

$$PCQ = 0.$$

„Die Schnittpunkte der Gegenseiten eines einer Kurve zweiter Ordnung eingeschriebenen Sechsecks liegen in einer geraden Linie (Satz des Pascal).“



2) In dem Spezialfalle, wo der Punkt A auf δ, der Punkt E auf β liegt, also $A\delta = 0$ und $E\beta = 0$ ist, sind die Punkte A und B, D und E koinzident, ist $B = A$, $D = E$. Die äussere Diagonale PQ des vollständigen Vierecks AC_1EU und diejenige P_1Q_1 des vollständigen Vierecks AC_1EU_1 (Fig. 48) gehen durch den Punkt C.

„Die äusseren Diagonalen aller einer Kurve zweiter Ordnung eingeschriebenen Vierecke mit drei festen Ecken schneiden sich in einem Punkte.“

Weil $B = A$, $D = E$ ist, so werden die Strahlen $AC \equiv BC$ und $EC \equiv DC$ zu Tangenten der Kurve in den Punkten A und E. Daraus ergiebt sich eine einfache Tangentenkonstruktion, wenn die Kurve und der oder die Berührungspunkte gegeben sind.

Fig. 49.

3) Ein zweiter besonderer Fall ist der, dass $A\beta = 0$ und $E\delta = 0$ sind, daſs A in β und E in δ liegt (Fig. 49).

Aus der Gleichung

$$UA\beta C\delta EU = 0$$

folgt dann

$$UA\beta \equiv A,\quad UA\beta C \equiv AC,\quad UA\beta C\delta \equiv (AC)\delta \equiv P,$$
$$UA\beta C\delta E \equiv PE \equiv \delta,\quad UA\beta C\delta EU \equiv \delta U = 0,$$

ferner ergiebt sich aus

$$UE\delta C\beta AU = 0,$$

dafs auch $\beta U = 0$ ist.

Daher genügt jeder Punkt von δ und jeder Punkt von β der Gleichung der Kurve. Weil A auf β und E auf δ liegt, so wird die planimetrische Gleichung der Kurve befriedigt durch

$$(UA)\beta = 0, \qquad \delta(EU) = 0,$$

die Kurve zweiter Ordnung zerfällt in die beiden Geraden β und δ.

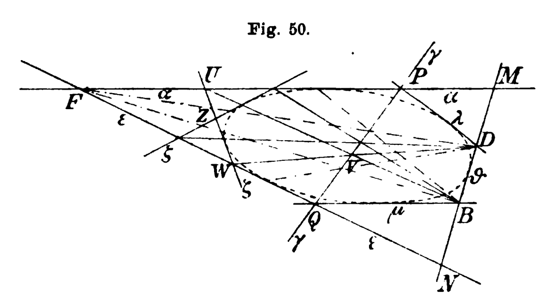
§ 38. Die Kurve zweiter Klasse.

Der planimetrischen Gleichung der Kurve zweiter Ordnung ist reziprok die Gleichung

$$\zeta\alpha B\gamma D\varepsilon\zeta = 0, \tag{1}$$

die Gesamtheit aller durch sie gegebenen Geraden ζ ist das durch sie festgelegte geometrische Gebilde, als welches wir aber gewöhnlich die Gesamtheit der Schnittpunkte der unmittelbar aufeinander folgenden Geraden ζ auffassen, die eine Kurve bilden.

Fig. 50.



Gegeben sind die festen Geraden α, γ, ε und die festen Punkte B, D (Fig. 50).

Jeder beliebige Strahl ζ ergiebt sich auf folgende Weise. Es ist $\zeta\alpha \equiv U \equiv$ einem beliebigen Punkte auf α, $\zeta\alpha B \equiv UB$, $\zeta\alpha B\gamma \equiv (UB)\gamma \equiv V$, $\zeta\alpha B\gamma D \equiv VD$, $\zeta\alpha B\gamma D\varepsilon \equiv (VD)\varepsilon \equiv W$, $\zeta\alpha B\gamma D\varepsilon\zeta \equiv \zeta W = 0$, mithin ist $\zeta \equiv UW$.

Durch die Konstruktion der Strahlen ζ entstehen zwei perspektivische Strahlenbüschel mit den Mittelpunkten B, D und der perspektivischen Axe γ, sowie auf α und ε zwei projektivische Punktreihen, was auch die Gleichung der Kurve unmittelbar aussagt.

„Die Kurve ist das Erzeugnis zweier projektivischen Punktreihen".

Die Betrachtung des veränderlichen Dreiecks UVW zeigt, dafs

seine drei Ecken U, V und W auf den festen Geraden $\alpha, \gamma, \varepsilon$ resp. fortrücken, seine Seitenlinien UV und VW stets durch die festen Punkte B und D resp. gehen, die dritte Seitenlinie UW die Kurve beschreibt.

„Durchlaufen die Ecken eines veränderlichen Dreiecks drei feste Geraden, während zwei Seitenlinien um feste Punkte in ihnen sich drehen, so beschreibt die dritte Seitenlinie die Kurve.“

Weil die Gleichungen bestehen

$$\zeta\alpha B\gamma D\varepsilon\zeta = \zeta\varepsilon D\gamma B\alpha\zeta = 0,$$

so verschwinden diese Produkte mit $\zeta = \alpha$ und $\zeta = \varepsilon$, es gehören α und ε den Strahlen ζ an. Es ist $BD\alpha \equiv M$, $BD\varepsilon \equiv N$. Mit $M \equiv \zeta\alpha$ finden wir, dafs der Strahl $BD \equiv MN \equiv \zeta$ ist. Es ist $\alpha\gamma \equiv P$, $\gamma\varepsilon \equiv Q$. Mit $\zeta\alpha \equiv P$ und sodann $\zeta\varepsilon \equiv Q$ ergiebt sich durch Konstruktion, dafs auch DP und BQ Strahlen ζ sind. Mithin sind durch die Gleichung fünf ausgezeichnete Strahlen ζ gegeben. Durch jeden Punkt U von α gehen zwei Strahlen ζ, nämlich α und UW, ebenso gehen durch jeden Punkt W auf ε zwei Strahlen und durch irgend einen Punkt Z der Ebene zwei Tangenten der Kurve, weshalb wir sie eine solche zweiter Klasse nennen.

„Eine Kurve zweiter Klasse ist durch fünf ihrer Tangenten bestimmt, sie ist das Erzeugnis zweier projektivischen Punktreihen, der einen Seitenlinie eines veränderlichen Dreiecks, wenn dessen Ecken drei feste Geraden durchlaufen und seine beiden anderen Seitenlinien um feste Punkte sich drehen.“

Setzen wir $BD = \vartheta$, $DP = \lambda$, $BQ = \mu$, dann ist $B \equiv \vartheta\mu$, $D \equiv \lambda\vartheta$, $\gamma \equiv PQ \equiv (\alpha\lambda)(\mu\varepsilon)$, womit die (1) übergeht in

$$\zeta\alpha(\vartheta\mu)[(\alpha\lambda)(\mu\varepsilon)](\lambda\vartheta)\varepsilon\zeta = 0,$$

und das ist die planimetrische Gleichung der Kurve, wenn fünf Tangenten derselben gegeben sind.

Die Linien UB, PQ und DW sind die drei Diagonalen durch die Gegenecken des Sechsseits der Tangenten α, λ, ϑ, μ, ε, ζ, sie schneiden sich in einem Punkte V.

Die letzte Gleichung kann geschrieben werden

$$[(\zeta\alpha)(\vartheta\mu)][(\alpha\lambda)(\mu\varepsilon)][(\lambda\vartheta)(\varepsilon\zeta)] = 0,$$

so dafs

$$(UB)(PQ)(DW) = 0$$

ist.

„Die Diagonalen durch die Gegenecken eines einer Kurve zweiter Klasse umschriebenen Sechsseits schneiden sich in einem Punkte (Satz von Brianchon).“

2) Ist $\alpha D = 0$ und $B\varepsilon = 0$, liegt D in α, B in ε, so tritt ein Spezialfall ein, es ist dann $\lambda \equiv \alpha$ und $\mu \equiv \varepsilon$, das vorhin genannte Sechsseit geht in das Vierseit der Tangenten $\alpha, \vartheta, \varepsilon, \zeta$ über. Mit variablem ζ schneiden sich die Diagonalen dieser, der Kurve umschriebenen Vierseite auf einer Geraden, nämlich auf γ.

3) Ein weiterer spezieller Fall ergiebt sich mit $B\alpha = 0$ und $D\varepsilon = 0$, wenn B in α und D in ε liegt. Es ist leicht zu sehen, dafs dann die Kurve in zwei Strahlenbüschel mit den Mittelpunkten B und D, resp. in die beiden Punkte B und D degeneriert.

§ 39. Die Kurve erster Ordnung und diejenige erster Klasse.

Die Gleichung

$$ABU = 0$$

ist die Gleichung einer Kurve erster Ordnung, weil jede andere gerade Linie die durch sie bestimmte Gerade AB nur in einem Punkte schneidet. Jede gerade Linie ist somit auch eine Kurve erster Ordnung.

Die Gleichung

$$A\zeta = 0$$

giebt die Gesamtheit aller durch den Punkt A gehenden Strahlen, eine Kurve erster Klasse, denn durch jeden Punkt der Ebene und A läfst sich nur ein Strahl ziehen. Der Mittelpunkt des Strahlenbüschels $A\zeta$ ist schlechthin die Kurve zweiter Klasse. Jeder Punkt ist somit auch eine Kurve zweiter Klasse.

§ 40. Identität der Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse.

Die planimetrische Punktgleichung der Kurve zweiter Ordnung lautet

$$UA(C_1D)[(AB)(DE)](BC_1)EU = 0. \qquad (1)$$

Lassen wir den Punkt B unendlich nahe an A, den Punkt D unendlich nahe an E rücken, setzen wir $B = A$, $D = E$, dann geht die (1) über in

$$UA(C_1E)[(AA)(EE)](AC_1)EU = 0,$$

die Geraden AB und DE werden zu Tangenten der Kurve in den Punkten A und E, so dafs mit $AA \equiv \alpha_1$, $EE \equiv \varepsilon_1$ sich ergiebt

$$UA(C_1E)[\alpha_1\varepsilon_1](AC_1)EU = 0. \qquad (2)$$

Lassen wir ferner den Punkt B unendlich nahe an C_1, den Punkt E unendlich nahe an U und D nach E wandern, setzen wir $B = C_1$, $E = U$, $D = E$, so folgt aus (1)

$$UA(C_1E)[(AC_1)(EU)](C_1C_1)\,UU = 0,$$

die Geraden BC_1 und EU werden zu Tangenten in den Punkten C_1 und U, und mit $C_1C_1 \equiv \gamma_1$, $UU \equiv \zeta$ erhalten wir

$$UA(C_1E)[(AC_1)(EU)]\gamma_1\zeta = 0. \qquad (3)$$

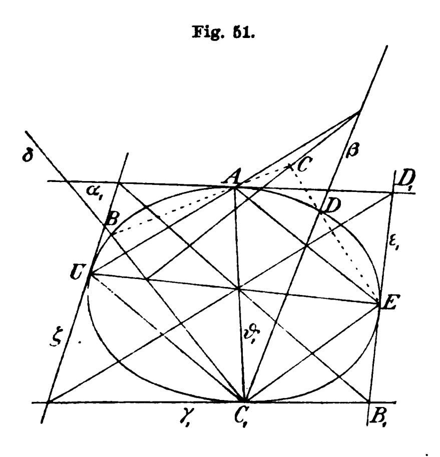
Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt, weil sie aussagen, dafs vier Punkte in einer geraden Linie liegen,

$$[(\alpha_1\varepsilon_1)(\gamma_1\zeta)](AC_1)(EU) = 0, \qquad (4)$$

und durch zyklische Buchstabenvertauschung ergiebt sich aus dieser Relation

$$[(\varepsilon_1\gamma_1)(\zeta\alpha_1)](EU)(C_1A) = 0. \qquad (5)$$

Fig. 51.



Die Gleichungen (4) und (5) enthalten den Satz:

„Die beiden Diagonalen eines einer Kurve zweiter Ordnung umschriebenen einfachen Vierseits gehen durch den Schnittpunkt der Diagonalen des ihr eingeschriebenen Vierecks, welches zu Eckpunkten die Berührungspunkte der Seiten des Vierseits besitzt (Fig. 51).“

Aus (4) und (5) folgt, weil die in ihnen enthaltenen Geraden in einem Punkte sich schneiden,

$$(\zeta\alpha_1)(\varepsilon_1\gamma_1)(AC_1)(\alpha_1\varepsilon_1)(\gamma_1\zeta) = 0,$$

welches die Liniengleichung einer Kurve zweiter Klasse ist, sie geht mit $\varepsilon_1\gamma_1 \equiv B_1$, $AC_1 \equiv \vartheta_1$, $\alpha_1\varepsilon_1 = D_1$ über in

$$\zeta\alpha_1B_1\vartheta_1D_1\gamma_1\zeta = 0,$$

und das ist die Gleichung einer Kurve zweiter Klasse als Erzeugnis zweier projektivischen Punktreihen.

In ähnlicher Weise gelangen wir von der Gleichung einer Kurve zweiter Klasse zu derjenigen einer Kurve zweiter Ordnung.

„Eine Kurve zweiter Ordnung ist auch eine Kurve zweiter Klasse und eine Kurve zweiter Klasse ist auch eine Kurve zweiter Ordnung.“

§ 41. Kurvenbüschel zweiter Ordnung und Kurvenschaar zweiter Klasse.

1) Das planimetrische Produkt $UA\beta C\delta U$ stellt eine durch den Punkt U gehende gerade Linie dar, diese schneide die feste Gerade ε in einem Punkte G, was die Kongruenz bedingt

$$UA\beta C\delta U\varepsilon \equiv G,$$

aus der sich ergiebt

$$UA\beta C\delta UG = 0. \tag{1}$$

Demnach liegen alle Punkte U, welche den Punkten G auf ε entsprechen, auf einer Kurve zweiter Ordnung, es entspricht dem Punkte G die durch die (1) gegebene Kurve. Die Gesamtheit aller Kurven zweiter Ordnung, welche in dieser Weise den Punkten G auf ε entspricht, nennen wir ein Kurvenbüschel zweiter Ordnung, wir sagen, dafs die Gerade ε perspektisch zu diesem Kurvenbüschel gelegen sei.

Nun ist zu untersuchen, ob die Kurven eines solchen Büschels gemeinsame Punkte besitzen. — Sehen wir den Punkt G als Durchschnittspunkt von ε und einer variablen Geraden ϑ an, dann ist auch

$$UA\beta C\delta U\varepsilon\vartheta = 0$$

die Gleichung der Kurve zweiter Ordnung und jeder Geraden ϑ entspricht eine besondere Kurve. Daraus geht hervor, dafs alle Kurven zweiter Ordnung, welche den verschiedenen Punkten G entsprechen, diejenigen Punkte gemein haben, für die

$$UA\beta C\delta U\varepsilon = 0 \tag{2}$$

ist. Diese Gleichung wird zuerst mit $U = A$ befriedigt. Ist $UA\beta = 0$, dann müssen A und β zusammenfallen, was ausgeschlossen ist. Wenn $UA\beta C = 0$ ist, so mufs β durch C gehen, und wenn $UA\beta C\delta = 0$ ist, hat C in δ zu liegen, welche Fälle auch ausgeschlossen sind. Nun kann der Punkt $UA\beta C\delta$ mit dem Punkte U zusammenfallen, dann ist

$$UA\beta C\delta \equiv U, \quad \text{oder} \quad UA\beta C\delta U = 0.$$

d. h. der Punkt U hat auf den Geraden $UA\beta C$ und δ gleichzeitig zu liegen, es hat

$$UA\beta CU = 0$$

zu sein; aber diese Gleichung ist diejenige einer Kurve der zweiten Ordnung, welche in die beiden Geraden β und AC degeneriert, mithin genügen die Punkte $C_1 \equiv \beta\delta$ und $B \equiv AC\delta$ der Gleichung des

Kurvenbüschels. Verschwindet auch das Produkt $UA\beta C\delta U$ nicht, so drückt es eine durch U gehende Gerade aus. Damit nun

$$UA\beta C\delta U\varepsilon = 0$$

sein kann, hat diese Gerade mit dem Strahle ε zusammenzufallen, d. h. es hat sowohl der Punkt U als auch der Punkt $UA\beta C\delta$ auf ε zu liegen, woraus

$$UA\beta C\delta\varepsilon = 0, \quad \text{oder} \quad \varepsilon\delta C\beta A U = 0$$

folgt. Mithin fällt der Punkt U mit dem Schnittpunkte der Strahlen ε und $\varepsilon\delta C\beta A$ zusammen, so dafs, wenn in dieser Lage $U = E$ gesetzt wird,

$$E \equiv \varepsilon\delta C\beta A\varepsilon$$

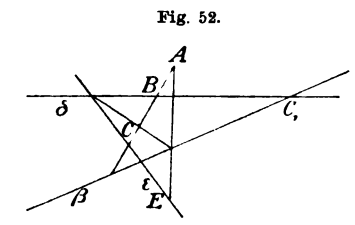
ein vierter Punkt ist, welchen die Kurven der Schaar gemeinsam besitzen.

Die vier Punkte

$$A, \quad C_1 \equiv \beta\delta, \quad B \equiv AC\delta, \quad E \equiv \varepsilon\delta C\beta A\varepsilon$$

nennen wir Mittelpunkte des Kurvenbüschels zweiter Ordnung, weil sich seine Kurven sämtlich um diese vier festen Punkte (Fig. 52) schlingen, jeder Kurve des Büschels entspricht auf ε derjenige Punkt, in welchem sie ε aufser in dem Punkte E zum zweiten Male schneidet.

Fig. 52.



2) Setzen wir an Stelle der Gleichung (2) eines Kurvenbüschels zweiter Ordnung die ihr entsprechende reziproke Gleichung

$$\xi\alpha B\gamma D\xi F = 0,$$

so ist diese die Gleichung einer Kurvenschaar zweiter Klasse. Sämtliche Kurven derselben haben vier feste Tangenten gemeinsam.

Weil jedem Punkte auf ε nur eine Kurve zweiter Ordnung und jeder Geraden durch F nur eine Kurve zweiter Klasse entspricht, so ist sowohl das Kurvenbüschel zweiter Ordnung als auch die Kurvenschaar zweiter Klasse von einfach unendlicher Mannigfaltigkeit.

Abhandlungen über Kurven, welche durch gleich Null gesetzte planimetrische Produkte nullter Stufe dargestellt werden können, finden wir im Journal von Crelle: Bd. 31, S. 111; Bd. 36, S. 177; Bd. 42, S. 187; Bd. 44, S. 1 und Bd. 52, S. 254, von Grafsmann selbst.

Fünfter Abschnitt.

Die Multiplikation im Raume als Elementarsystem vierter Stufe.

§ 42. Produkte aus Punkten.

Weil jede Gröfse ersten Grades im Raume als Gebiet vierter Stufe aus vier voneinander unabhängigen Punkten numerisch abgeleitet werden kann, wählen wir als Einheit des Systemes das äufsere Produkt aus irgend vier solchen Punkten E_1, E_2, E_3 und E_4, setzen

$$E_1 E_2 E_3 E_4 = E_1 (E_2 - E_1)(E_3 - E_1)(E_4 - E_1) = 1,$$

so dafs das Elementarsystem vierter Stufe vier relative Einheiten, sechs Einheiten zweiter Stufe, nämlich E_1E_2, E_1E_3, E_1E_4, E_2E_3, E_2E_4, E_3E_4, vier Einheiten dritter Stufe, nämlich $E_1E_2E_3$, $E_2E_3E_4$, $E_3E_4E_1$, $E_4E_1E_2$, und eine Einheit vierter Stufe, $E_1E_2E_3E_4$, welche die absolute Einheit repräsentiert, besitzt.

Durch die Hypothese ergiebt sich, wenn wir

$$A = \sum_{k=1}^{k=4} a_k E_k, \quad B = \sum_{k=1}^{k=4} b_k E_k, \ldots\ldots$$

annehmen,

$$\begin{aligned} AB = \sum_{k=1}^{k=4} a_k E_k \sum_{k=1}^{k=4} b_k E_k &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) E_1 E_2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) E_1 E_3 \\ &+ (a_1 b_4 - a_4 b_1) E_1 E_4 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) E_2 E_3 \\ &+ (a_2 b_4 - a_4 b_2) E_2 E_4 + (a_3 b_4 - a_4 b_3) E_3 E_4 \\ &= m_{1,2} E_1 E_2 + m_{1,3} E_1 E_3 + m_{1,4} E_1 E_4 \\ &+ m_{2,3} E_2 E_3 + m_{2,4} E_2 E_4 + m_{3,4} E_3 E_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ABC = \left(\sum_{k=1}^{k=4} a_k E_k \sum_{k=1}^{k=4} b_k E_k\right) \sum_{k=1}^{k=4} c_k E_k &= (m_{1,2} c_3 - m_{1,3} c_2) E_1 E_2 E_3 \\ &+ (m_{2,3} c_4 - m_{2,4} c_3) E_2 E_3 E_4 \\ &+ (m_{3,4} c_1 - m_{1,4} c_3) E_3 E_4 E_1 \\ &+ (m_{4,1} c_2 - m_{2,4} c_1) E_4 E_1 E_2 \end{aligned}$$

$$ABCD = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} E_1 E_2 E_3 E_4 = m E_1 E_2 E_3 E_4 = m,$$

$$ABCDE = m(e_1 E_1 + e_2 E_2 + e_3 E_3 + e_4 E_4).$$

Das Produkt aus zwei Punkten oder Gröfsen ersten Grades ist ein Linienteil, eine Vielfachensumme der Einheiten zweiter Stufe, dasjenige aus drei Punkten ist ein Flächenteil, eine Vielfachensumme der Einheiten dritter Stufe, dasjenige aus vier Punkten ein Körperteil, ein Vielfaches der Einheit des Systemes, resp. eine reelle Zahl, es sind diese sämtlichen Produkte rein progressiv. Das Produkt aus fünf ungleichartigen Punkten ist eine Gröfse ersten Grades, regressiv, dasjenige aus sechs Punkten ist ebenfalls regressiv, ein Linienteil, u. s. f.

Die Stufenzahl des Produktes aus beliebig vielen ungleichartigen Punktfaktoren ist gleich dem verbleibenden Reste, wenn wir die Summe der Stufenzahlen, die Anzahl der Faktoren durch die Stufenzahl vier des Hauptgebietes dividieren.

Ein jedes Produkt aus irgend welchen Gröfsen im Hauptgebiete vierter Stufe mit $E_1 E_2 E_3 E_4 = 1$ nennen wir ein stereometrisches Produkt.

§ 43. Einführung des Begriffes der Ergänzung.

Ist E das äussere Produkt aus irgend einer Anzahl relativer Einheiten, E' dasjenige aus den übrigen relativen Einheiten des Systemes, so ist

$$|E = (EE')E', \qquad (EE') = \pm 1.$$

Dadurch erhalten wir

$$|E_1 = E_2 E_3 E_4, \quad |E_2 = -(E_3 E_4 E_1), \quad |E_3 = E_4 E_1 E_2, \quad |E_4 = -(E_1 E_2 E_3),$$
$$|(E_1 E_2) = E_3 E_4, \quad |(E_1 E_3) = E_4 E_2, \quad |(E_1 E_4) = E_2 E_3,$$
$$|(E_2 E_3) = E_1 E_4, \quad |(E_2 E_4) = E_3 E_1, \quad |(E_3 E_4) = E_1 E_2,$$
$$|(E_1 E_2 E_3) = E_4, \quad |(E_2 E_3 E_4) = -E_1, \quad |(E_3 E_4 E_1) = E_2, \quad |(E_4 E_1 E_2) = -E_3,$$
$$|(E_1 E_2 E_3 E_4) = 1, \quad |m = m.$$

Die Ergänzung eines Fundamentalpunktes ist kongruent dem ihm gegenüberliegenden Fundamentalflächenteile, diejenige eines Fundamentallinienteiles ist gleich dem von ihm getrennt liegenden Fundamentallinienteile, diejenige eines Fundamentalflächenteiles ist kongruent dem Gegenfundamentalpunkte und die Ergänzung der Einheit des Systemes ist dieser Einheit gleich.

Die Stufenzahl der Ergänzung irgend einer Einheit ist gleich der Differenz aus den Stufenzahlen des Hauptgebietes, nämlich vier, und dieser Einheit.

Weil die Beziehungen existieren

$$E_1(E_2E_3E_4) = 1, \quad (E_1E_2)(E_3E_4) = 1, \quad (E_1E_2E_3)E_4 = 1,$$

so erhalten wir

$$E_1|E_1 = E_1^{\,2} = 1, \quad (E_1E_2)|(E_1E_2) = (E_1E_2)^2 = 1,$$
$$(E_1E_2E_3)|(E_1E_2E_3) = (E_1E_2E_3)^2 = 1,$$

überdies ist

$$(E_1E_2E_3E_4)|(E_1E_2E_3E_4) = (E_1E_2E_3E_4)^2 = 1,$$

und weil wir das Produkt aus einer Gröſse und der Ergänzung derselben, oder einer anderen Gröſse das innere Produkt beider Gröſsen nennen, so resultiert der Satz:

Das innere Quadrat einer jeden Einheit ist äquivalent der Einheit des Systemes, resp. der absoluten Einheit.

Gehen wir von der einfachen Ergänzung einer Einheit zu ihrer doppelten Ergänzung über, so ergiebt sich

$$|^2E_1 = |(E_2E_3E_4) = -E_1, \quad |^2(E_1E_2) = |(E_3E_4) = E_1E_2,$$
$$|^2(E_1E_2E_3) = |E_4 = -(E_1E_2E_3), \quad |^2(E_1E_2E_3E_4) = 1.$$

Die doppelte Ergänzung einer relativen Einheit ist dieser entgegengesetzt gleich, diejenige einer Einheit zweiter Stufe ist äquivalent dieser Einheit, diejenige einer Einheit dritter Stufe ist entgegengesetzt gleich dieser Einheit und diejenige der Einheit des Systemes ist ihr selbst gleich.

Der Ergänzungsstrich wirkt mithin auch in diesem Systeme als Verwandlungsfaktor.

Sei gegeben

$$A = aE_1, \quad \alpha = aE_1E_2, \quad \mathfrak{A} = aE_2E_3E_4.$$

Operieren wir an diesen Formeln mit $|$, sodann mit $|^2$, so erhalten wir

$$|A = a|E_1 = aE_2E_3E_4 = \mathfrak{A}, \quad |^2A = a|(E_2E_3E_4) = -aE_1 = -A,$$
$$|\alpha = a|(E_1E_2) = aE_3E_4, \quad |^2\alpha = a|(E_3E_4) = aE_1E_2 = \alpha,$$
$$|\mathfrak{A} = a|(E_2E_3E_4) = aE_1 = A, \quad |^2\mathfrak{A} = a|E_1 = -a(E_2E_3E_4) = -\mathfrak{A}.$$

Daraus geht, weil die Fundamentalpunkte beliebige, nur in keiner Zahlbeziehung stehende Punkte des Raumes sind, der Satz hervor:

Im Gebiete vierter Stufe ist, mit $E_1 E_2 E_3 E_4 = 1$, die Ergänzung einer Gröfse ersten Grades ein Flächenteil, ihre doppelte Ergänzung ihr entgegengesetzt gleich, die Ergänzung eines Linienteiles ein Linienteil, seine zweifache Ergänzung ihm äquivalent, die Ergänzung eines Flächenteiles eine Gröfse ersten Grades und seine doppelte Ergänzung ihm entgegengesetzt gleich.

Bestehen für die Gröfsen ersten Grades A, B und C die Formeln des § 42, dann ergiebt sich, weil der Ergänzungsstrich nur an geometrischen Gröfsen operiert,

$$|\,A = a_1|E_1 + a_2|E_2 + a_3|E_3 + a_4|E_4,$$
$$|\,A = a_1 E_2 E_3 E_4 - a_2 E_3 E_4 E_1 + a_3 E_4 E_1 E_2 - a_4 E_1 E_2 E_3,$$
$$|^2 A = a_1|^2 E_1 + a_2|^2 E_2 + a_3|^2 E_3 + a_4|^2 E_4,$$
$$|^2 A = -(a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3 + a_4 E_4) = -A;$$
$$|\,(AB) = m_{1,2}|(E_1 E_2) + m_{1,3}|(E_1 E_3) + m_{1,4}|(E_1 E_4) + m_{2,3}|(E_2 E_3) + m_{2,4}|(E_2 E_4) + m_{3,4}|(E_3 E_4),$$
$$|\,(AB) = m_{1,2} E_3 E_4 + m_{1,3} E_4 E_2 + m_{1,4} E_2 E_3 + m_{2,3} E_1 E_4 + m_{2,4} E_3 E_1 + m_{3,4} E_1 E_2,$$
$$|^2(AB) = m_{1,2}|^2(E_1 E_2) + \cdots + m_{3,4}|^2(E_3 E_4),$$
$$|^2(AB) = m_{1,2} E_1 E_2 + \cdots + m_{3,4} E_3 E_4 = AB;$$
$$|\,(ABC) = m_{1,2,3}|(E_1 E_2 E_3) + m_{2,3,4}|(E_2 E_3 E_4) + m_{3,4,1}|(E_3 E_4 E_1) + m_{4,1,2}|(E_4 E_1 E_2),$$
$$|\,(ABC) = m_{1,2,3} E_4 - m_{2,3,4} E_1 + m_{3,4,1} E_2 - m_{4,1,2} E_3,$$
$$|^2(ABC) = -(m_{1,2,3} E_1 E_2 E_3 + m_{2,3,4} E_2 E_3 E_4 + m_{3,4,1} E_3 E_4 E_1 + m_{4,1,2} E_4 E_1 E_2) = -ABC.$$

Indem wir die Resultate, welche sich für die doppelte Ergänzung von Gröfsen in den verschiedenen Gebieten ergeben haben, überblicken, gelangen wir zu dem allgemein gültigen Ergebnisse:

Ist A eine Gröfse p^{ter} Stufe im Hauptgebiete n^{ter} Stufe, dann ist

$$|^2\mathsf{A} = \mathsf{A}, \quad \text{oder} \quad |^2\mathsf{A} = (-1)^p \mathsf{A},$$

je nachdem die Stufenzahl des Hauptgebietes ungerade oder gerade ist.

§ 44. Produkte aus Einheiten beliebiger Stufe.

Für diese Produkte gilt das, was am Eingange des § 16 für solche Produkte im Raume als System dritter Stufe gesagt worden ist, nur mit der Modifikation, dafs die dortigen Strecken durch Punkte zu ersetzen sind und die Stufenzahl des Hauptgebietes jetzt gleich vier ist.

Das Produkt aus den beiden Einheiten dritter Stufe, $(E_1E_2E_3)$ und $(E_2E_3E_4)$, welche den Linienteil E_2E_3 als gemeinsames Element besitzen, mufs zunächst ein Linienteil sein. Denn die Summe der Stufenzahlen der Faktoren des Produktes ist gleich sechs, durch Division dieser Zahl mit der Stufenzahl vier des Hauptgebietes bleibt der Rest zwei, daher hat das Ergebnis ein Linienteil zu sein. Ist nun UV dieser unbekannte Linienteil, dann hat die Gleichung zu bestehen

$$(E_1E_2E_3)(E_2E_3E_4) = (UV).$$

Die Multiplikation der Seiten dieser Gleichung mit (E_2E_3) giebt

$$(E_1E_2E_3)(E_2E_3E_4)(E_2E_3) = (UV)(E_2E_3),$$

und weil dieser Multiplikator nicht nur in dem einen, sondern sogar in den beiden Faktoren des gegebenen Produktes liegt, so ist die linke Seite dieser Gleichung der Null äquivalent, mithin mufs sein

$$(UV)(E_2E_3) = 0.$$

Dieser Forderung allein wird genügt, wenn UV irgend ein Vielfaches von (E_2E_3) ist, wenn

$$(UV) = m(E_2E_3).$$

Weil jedoch das Ergebnis eine Einheit zweiter Stufe und positiv sein mufs, denn die Faktoren des in Rede stehenden Produktes sind positiv, überdies im ersteren sämtliche Elementarfaktoren vorhanden zu sein haben, so kann nur

$$m = (E_1E_2E_3E_4) = 1$$

sein, und es ergiebt sich mithin

$$(E_1E_2E_3)(E_2E_3E_4) = (E_1E_2E_3E_4)(E_2E_3) = (E_2E_3). \qquad (1)$$

Ferner haben wir

$$(E_1E_2E_3)(E_2E_3E_4) = [(-|E_4)|E_1],$$

folglich ist auch

$$(UV) = -[|E_4|E_1],$$

und weil

$$(UV) = E_2E_3, \quad E_2E_3 = -|(E_4E_1)$$

ist, so ergiebt sich

$$(|E_1|E_4) = |(E_1 E_4). \tag{2}$$

Betrachten wir ferner das Produkt aus einer Einheit zweiter und einer solchen dritter Stufe. Die Stufenzahl eines solchen Produktes mufs gleich Eins sein, daher mufs sein

$$(E_1 E_2)(E_2 E_3 E_4) = U,$$

aber dann ist

$$E_1 E_2 U = 0, \quad E_2 E_3 E_4 U = 0,$$

folglich mufs

$$U = m E_2, \quad m = (E_1 E_2 E_3 E_4) = 1$$

sein, was giebt

$$(E_1 E_2)(E_2 E_3 E_4) = (E_1 E_2 E_3 E_4) E_2 = E_2. \tag{3}$$

Noch ist

$$(E_1 E_2)(E_2 E_3 E_4) = [|(E_3 E_4)|E_1],$$

folglich ist auch

$$U = [|(E_3 E_4)|E_1]$$

und weil

$$U = E_2, \quad E_2 = |[E_3 E_4 E_1]$$

ist, so ergiebt sich

$$[|(E_3 E_4)|E_1] = |[(E_3 E_4) E_1]. \tag{4}$$

Liegt die Einheit zweiter Stufe ganz in der Einheit dritter Stufe, dann mufs das Ergebnis verschwinden. In der That haben wir

$$(E_1 E_2)(E_1 E_2 E_4) = [|(E_3 E_4)|E_3] = |[E_3 E_4 E_3] = 0.$$

Endlich müssen für das Produkt aus den Einheiten $(E_1 E_2)$ und $(E_2 E_3)$ zweiter Stufe die Bedingungen erfüllt sein

$$(E_1 E_2)(E_2 E_3) = m, \quad (E_1 E_2)(E_2 E_3) = (E_1 E_2 E_3) E_2,$$

$$(E_1 E_2)(E_2 E_3) = [|(E_3 E_4)|(E_1 E_4)] = |[(E_3 E_4)(E_1 E_4)] = |[E_3 E_4 E_1 E_4].$$

Bereits aus den beiden ersten Bedingungen geht hervor, dafs das Ergebnis nur Null sein kann und die dritte Bedingung sagt dasselbe aus, mithin ist

$$(E_1 E_2)(E_2 E_3) = 0.$$

Besitzen die beiden Einheiten zweiter Stufe kein gemeinsames Element, dann ist ihr Produkt dem durch sie bestimmten Körperteile äquivalent, denn wir haben

$$(E_1 E_2)(E_3 E_4) = E_1 E_2 E_3 E_4 = 1,$$

$$(E_1 E_2)(E_3 E_4) = [|(E_3 E_4)|(E_1 E_2)] = |[(E_3 E_4)(E_1 E_2)]$$

$$= |[E_3 E_4 E_1 E_2] = 1.$$

Diese Entwickelung führt uns, wenn wir unter E und E' Einheiten beliebiger Stufe verstehen, zu der allgemein gültigen Formel

$$(|E|E') = |(EE').$$

Das Produkt aus den Ergänzungen zweier Einheiten beliebiger Stufe ist gleich der Ergänzung des Produktes aus diesen Einheiten, und dieser Satz ist auch umgekehrt richtig.

Es bestehen die Beziehungen

$$|(E_1E_4) = E_2E_3, \quad ||(E_1E_4) = E_1E_4,$$

demnach haben wir, wenn wir in der letzten Gleichung mit dem einen Ergänzungsstriche in die Klammer gehen,

$$|(|E_1|E_4) = E_1E_4;$$

ferner existieren die Relationen

$$|[(E_3E_4)E_1] = |[E_3E_4E_1] = E_2,$$

$$||[(E_3E_4)E_1] = |E_2 = (-1)(E_3E_4E_1),$$

folglich ist

$$|[|(E_3E_4)|E_1] = (-1)[(E_3E_4)E_1],$$

mithin haben wir allgemein

$$(EE') = \pm|(|E|E'),$$

und es gilt hier das obere oder untere Zeichen, je nachdem E und E' von gleicher oder verschiedener Stufe sind. Bezeichnen p und q die Stufenzahlen von E und E', dann ist auch

$$(EE') = (-1)^{p+q}|(|E|E').$$

Das Produkt aus zwei beliebigen Einheiten ist kongruent der Ergänzung des Produktes aus den Ergänzungen dieser Einheiten.

Die Ergänzung des Produktes aus den Ergänzungen zweier Einheiten ist kongruent dem Produkte aus diesen Einheiten.

Infolge des Fundamentalsatzes

$$(|E|E') = |(EE')$$

sind wir in der Lage jedes Produkt aus Einheiten beliebiger Stufe auszuwerten. Beispielsweise ergiebt sich

$$E_2(E_3E_4E_1) = |[(E_3E_4E_1)E_2] = |[E_1E_2E_3E_4] = 1,$$

$$(E_2E_3)(E_4E_2) = |[(E_1E_4)(E_1E_3)] = |[E_1E_4E_1E_3] = 0,$$

$$(E_1E_2)(E_3E_4) = |[E_1E_2E_3E_4] = 1,$$

$$(E_1E_4)(E_1E_2E_3) = [|(E_2E_3)(-|E_4)] = -|[E_2E_3E_4] = E_1 = (E_1E_2E_3E_4)E_1,$$

$$(E_1E_2E_3)(E_1E_2E_4) = [|E_4(-|E_3)] = |[E_3E_4] = E_1E_2 = (E_1E_2E_3E_4)E_1E_2.$$

Das Produkt aus zwei nicht vollständig ineinander liegenden Einheiten beliebiger Stufe ist ihrem gemeinsamen Elemente gleich, ausgenommen, dafs diese Einheiten von zweiter Stufe sind, wo dann das Ergebnis verschwindet, wenn sie ein gemeinsames Element besitzen, gleich der Einheit des Systemes ist, wenn sie kein gemeinsames Element aufweisen. Das stereometrische Produkt aus einem Fundamentalpunkte und dem äufseren Produkte der übrigen Fundamentalpunkte ist kongruent der Einheit des Systemes, resp. der absoluten Einheit. Das stereometrische Produkt aus zwei Fundamentallinienteilen mit gemeinsamem Elemente verschwindet, es ist der Einheit des Systemes kongruent, wenn sie kein gemeinsames Element besitzen. Das stereometrische Produkt aus einem Fundamentallinienteile und einem Fundamentalflächenteile, in dem der Linienteil nicht liegt, ist kongruent dem ihnen gemeinsamen Fundamentalpunkte, in jedem anderen Falle verschwindet der Wert eines solchen Produktes. Das stereometrische Produkt aus zwei Fundamentalflächenteilen ist kongruent dem ihnen gemeinsamen Fundamentallinienteile, dasjenige aus einem Fundamentalflächenteile und ihm selbst verschwindet.

§ 45. Das stereometrische Produkt aus den Ergänzungen beliebiger Gröfsen.

1) Sei

$$A = \sum_{k=1}^{k=4} a_k E_k, \quad B = \sum_{k=1}^{k=4} b_k E_k, \dots$$

Damit ergiebt sich

$$|(AB) = m_{1,2}|(E_1E_2) + m_{1,3}|(E_1E_3) + \cdots + m_{3,4}|(E_3E_4)$$

$$|A|B = \sum_{k=1}^{k=4} a_k|E_k \sum_{k=1}^{k=4} b_k|E_k$$

$$= m_{1,2}|E_1|E_2 + m_{1,3}|E_1|E_3 + \cdots + m_{3,4}|E_3|E_4,$$

$$|A|B = m_{1,2}|(E_1E_2) + m_{1,3}|(E_1E_3) + \cdots + m_{3,4}|(E_3E_4).$$

Demnach besteht die Relation

$$(|A|B) = |(AB).$$

In entsprechender Weise finden wir

$$[|(AB)|C] = |[(AB)C],$$

$$[|(AB)|(CD)] = |[(AB)(CD)],$$

$$[|(AB)|(CDE)] = |[(AB)(CDE)],$$

$$[|(ABC)|(DEF)] = |[(ABC)(DEF)].$$

Sind A und Γ irgend welche Gröfsen im Gebiete vierter Stufe, dann ist allgemein

$$(|\mathsf{A}|\Gamma) = |(\mathsf{A}\Gamma).$$

Das stereometrische Produkt aus den Ergänzungen zweier Gröfsen im Gebiete vierter Stufe ist stets gleich der Ergänzung des Produktes aus diesen Gröfsen.

2) An diesen Satz schliefst sich unmittelbar der folgende an:

Das stereometrische Produkt aus den Ergänzungen mehrerer Gröfsen ist gleich der Ergänzung des Produktes aus diesen Gröfsen.

Angenommen, es gelte der Satz für m Faktoren, es sei

$$(|\Gamma_1|\Gamma_2 \ldots |\Gamma_{m-1}|\Gamma_m) = |(\Gamma_1\Gamma_2 \ldots \Gamma_{m-1}\Gamma_m),$$

so gilt er auch für $(m+1)$ Faktoren, denn dann ist

$$(|\Gamma_1|\Gamma_2 \ldots |\Gamma_{m-1}|\Gamma_m|\Gamma_{m+1}) = |(\Gamma_1\Gamma_2 \ldots \Gamma_{m-1}\Gamma_m)|\Gamma_{m+1}$$

$$= |(\Gamma_1\Gamma_2 \ldots \Gamma_m\Gamma_{m+1}),$$

weil dieser Satz für zwei Faktoren erwiesen worden ist, folglich gilt er für jede beliebige Faktorenzahl.

§ 46. Die Ergänzung eines Polynoms.

Sei $\mathfrak{A} = aE$, $\mathfrak{B} = bE$, $\mathfrak{C} = cE$, wobei E eine Einheit irgend welcher Stufe bedeuten soll. Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
|(\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B} \pm \mathfrak{C} \pm \cdots) &= |(aE \pm bE \pm cE \pm \cdots) \\
&= |[(a \pm b \pm c \pm \cdots) E] = (a \pm b \pm c \pm \cdots)|E \\
&= a|E \pm b|E \pm c|E \pm \cdots \\
&= |\mathfrak{A} \pm |\mathfrak{B} \pm |\mathfrak{C} \pm \cdots
\end{aligned}
$$

Die Ergänzung eines Polynoms ist gleich der Summe der Ergänzungen seiner Glieder.

§ 47. Produkte aus beliebigen Gröfsen im Gebiete vierter Stufe.

1) Setzen wir in der Gleichung

$$(E_1 E_2 E_3)(E_2 E_3 E_4) = (E_1 E_2 E_3 E_4)(E_2 E_3)$$

an die Stelle irgend einer der in ihr vorkommenden relativen Einheiten auf ihrer linken Seite eine aus sämtlichen, oder einigen ursprünglichen Einheiten numerisch abgeleitete Gröfse ersten Grades, dann bleibt die Gleichung in der Weise bestehen, dafs auch auf der rechten Seite derselben an die Stelle der fraglichen relativen Einheit diese Gröfse ersten Grades tritt. Setzen wir z. B. an die Stelle der Einheit E_2 auf ihrer linken Seite die Gröfse

$$B = b_1 E_1 + b_2 E_2 + b_3 E_3 + b_4 E_4,$$

so ergiebt sich leicht, dafs

$$(E_1 B E_3)(B E_3 E_4) = (E_1 B E_3 E_4)(B E_3)$$

ist. Hieraus und aus den Ergebnissen des § 44 schliefsen wir:

Alle für Produkte aus beliebigen Einheiten bestehenden Relationen gelten auch dann, wenn wir an die Stelle der in ihnen enthaltenen relativen Einheiten Gröfsen ersten Grades substituieren.

Bedenken wir, dafs die ursprünglichen Einheiten voneinander unabhängige, sonst aber willkürlich gewählte Punkte des Raumes sind, so ergiebt sich der vorstehende Satz unmittelbar.

Weil nun

$$
\begin{aligned}
(E_1 E_2)(E_2 E_3) &= 0, \\
(E_1 E_2)(E_3 E_4) &= E_1 E_2 E_3 E_4, \\
(E_1 E_2)(E_2 E_3 E_4) &= (E_1 E_2 E_3 E_4) E_2, \\
(E_1 E_2 E_3)(E_2 E_3 E_4) &= (E_1 E_2 E_3 E_4)(E_2 E_3)
\end{aligned}
$$

ist, so sind auch die Relationen richtig

$$(AB)(BC) = 0,$$

$$(AB)(CD) = ABCD,$$

$$(AB)(BCD) = (ABCD)B,$$

$$(ABC)(BCD) = (ABCD)(BC),$$

und weil Linienteile auf ihren Trägern, Flächenteile in ihren Ebenen sich willkürlich verschieben lassen, letztere auch in solche von gegebener Seite verwandelt werden können, ohne ihren Wert zu ändern, so ergeben sich die Sätze:

Das stereometrische Produkt aus zwei Linienteilen auf sich schneidenden Trägern verschwindet, dasjenige aus zwei Linienteilen auf sich kreuzenden Trägern ist einem Körperteile äquivalent. Das stereometrische Produkt aus einem Linienteile und einem Flächenteile ist, wenn ersterer nicht in letzterem liegt, ein Vielfaches des Schnittpunktes ihrer Träger, sonst äquivalent Null. Das stereometrische Produkt aus zwei Flächenteilen, deren Träger sich schneiden, ist ein in die Schnittlinie ihrer Träger fallender Linienteil. Befinden sich die beiden Flächenteile in einer Ebene, so verschwindet ihr stereometrisches Produkt.

Mittelst der vorstehenden Formeln lassen sich jetzt sämtliche übrigen entsprechenden Produkte direkt auswerten.

Beispielsweise haben wir

$$(AB)(CBD) = -(AB)(BCD) = -(ABCD)B,$$

$$(ABC)(ABD) = (CAB)(ABD) = (CABD)(AB) = (ABCD)(AB),$$

$$(ABC)(AD) = (AD)(ABC) = (ADBC)A = (ABCD)A,$$

denn es ist, mit $(ABC) = |M, \quad AD = |(NP),$

$$(ABC)(AD) = |M|(NP) = |[M(NP)] = |[(NP)M] = |(NP)|M$$
$$= (AD)(ABC).$$

Die letzte Lösung ergiebt sich auch dadurch, dafs wir ausgehen von dem entsprechenden Einheitenprodukte, alsdann erhalten wir:

$$(E_1E_2E_3)(E_1E_4) = -|E_4|(E_2E_3) = -|(E_4E_2E_3) = -|(E_2E_3E_4) = +E_1$$
$$= (E_1E_2E_3E_4)E_1,$$

und nun resultiert hieraus unmittelbar

$$(ABC)(AD) = (ABCD)A.$$

2) Seien ABC und DEF zwei Flächenteile in parallelen Ebenen und sei der Wert ihres stereometrischen Produktes zu bestimmen.

Zunächst dürfen wir setzen

$$(ABC)(DEF) = [A(B-A)(C-A)][D(E-D)(F-D)].$$

Weil die Spathecke dieser Flächenteile in parallelen Ebenen liegen, so ist mit

$$(B-A)(C-A) = \alpha\gamma$$

das Spatheck des zweiten Faktors

$$(E-D)(F-D) = m(\alpha\gamma),$$

mithin ist

$$(ABC)(DEF) = m[(A\alpha\gamma)(D\alpha\gamma)],$$

aber die Strecken α und γ sind unendlich fernen Punkten mit den Gewichten Null äquivalent, folglich ist

$$\begin{aligned}(ABC)(DEF) &= m(AD\alpha\gamma)(\alpha\gamma)\\ &= [AD(E-D)(F-D)](\alpha\gamma),\\ (ABC)(DEF) &= (ADEF)(\alpha\gamma) = (ADEF)[(B-A)(C-A)]\\ &= n\alpha\gamma = n(B-A)(C-A).\end{aligned}$$

Das stereometrische Produkt aus zwei parallelen Flächenteilen ist einem zu ihnen parallelen Spathecke kongruent, gleich der Volumenzahl des Spathes zwischen den Trägern der Faktoren des Produktes und von gleichen Grundflächen mit einem der Faktoren, mal dem Parallelogramme des anderen Faktors.

3) ABC, ABD und ACD sind drei Flächenteile, mit welchen die Seitenflächen einer Pyramide zusammenfallen. — Für das Produkt aus diesen Flächenteilen ergiebt sich

$$\begin{aligned}(ABC)(ABD)(ACD) &= [(ABC)(ABD)](ACD)\\ &= (ABCD)[(AB)(ACD)]\\ &= (ABCD)(ABCD)A\\ &= (ABCD)^2 A.\end{aligned}$$

Das stereometrische Produkt aus drei Flächenteilen, welche einen im Endlichen gelegenen Punkt gemeinsam besitzen, ist einer mit diesem Punkte koinzidierenden Punktgröfse äquivalent, ihr Gewicht ist gleich dem Quadrate der Volumenzahl des durch die ungleichen Elementarfaktoren bestimmten Spathes.

4) Für das Produkt aus den drei Flächentheilen ABC, ABD und ABE ergiebt sich

$$(ABC)(ABD)(ABE) = [(ABC)(ABD)](ABE)$$
$$= (ABCD)[(AB)(ABE)] = 0.$$

Das stereometrische Produkt aus drei Flächenteilen, deren Ebenen in einer Geraden sich schneiden, verschwindet.

5) Für das Produkt aus vier Flächenteilen, welche teilweise die Seitenflächen einer Pyramide bilden, erhalten wir

$$(ABC)(ABD)(ACD)(BCD) = [(ABCD)(AB)][(ACDB)(CD)]$$
$$= (ABCD)^2(ABCD)$$
$$= (ABCD)^3.$$

Das stereometrische Produkt aus vier Flächenteilen, welche teilweise die Seitenflächen einer Pyramide bilden, ist gleich dem Kubus der Volumenzahl des durch ihre ungleichartigen Punktfaktoren bestimmten Spathes.

6) Besitzen vier Flächenteile einen gemeinsamen Punkt A, dann ist

$$(ABC)(ABD)(ACD)(ACE) = [(ABC)(ABD)(ACD)](ACE)$$
$$= (ABCD)^2[A(ACE)] = 0.$$

Das stereometrische Produkt aus vier Flächenteilen, deren Ebenen in einem Punkte sich schneiden, verschwindet.

7) „Das stereometrische Produkt aus zwei Gröfsen ersten Grades verschwindet, wenn ihre Orte zusammenfallen, dasjenige aus zwei Linienteilen, wenn ihre Träger komplanar sind, dasjenige aus zwei Flächenteilen, wenn ihre Träger zusammenfallen. Es ist das stereometrische Produkt aus einem Punkte und einem Linien- oder einem Flächenteile gleich Null, wenn der Punkt in dem Gebiete des Linien- oder des Flächenteiles liegt. Das stereometrische Produkt aus einem Linien- und einem Flächenteile verschwindet, wenn ihre Träger zusammenfallen.

§ 48. Innere Produkte im Gebiete vierter Stufe.

Das äufsere Produkt aus einer dem Hauptgebiete untergeordneten Gröfse und der Ergänzung einer zweiten solchen Gröfse nennen wir das innere Produkt dieser beiden Gröfsen.

1) Für das innere Produkt zweier Gröfsen ersten Grades ergiebt sich

$$A|B = \sum_{k=1}^{k=4} a_k E_k \sum_{k=1}^{k=4} b_k | E_k = \sum_{k=1}^{k=4} a_k b_k,$$

$$B|A = \sum_{k=1}^{k=4} b_k E_k \sum_{k=1}^{k=4} a_k | E_k = \sum_{k=1}^{k=4} a_k b_k,$$

folglich ist

$$A|B = B|A.$$

Die Faktoren des inneren Produktes aus zwei Gröfsen ersten Grades sind ohne Zeichenwechsel vertauschbar.

2) Für das innere Produkt aus der Punktgröfse A und dem Linienteile BC erhalten wir, wenn wir $|(BC) = FG$ setzen:

$$A|(BC) = A(FG) = (FG)A = |(BC)A,$$

und mit $|C = FGH$ ist

$$(AB)|C = (AB)(FGH) = (FGH)(AB) = |C(AB).$$

3) Für das innere Produkt aus den Linienteilen AB und CD bekommen wir zunächst, wenn wir $|(CD) = FG$ nehmen,

$$(AB)|(CD) = (AB)(FG) = ABFG = (FG)(AB) = |(CD)(AB),$$

ist ferner

$$AB = m_{1,2} E_1 E_2 + \cdots + m_{3,4} E_3 E_4, \quad CD = n_{1,2} E_1 E_2 + \cdots + n_{3,4} E_3 E_4,$$

so ergiebt sich

$$(AB)|(CD) = \{m_{1,2} E_1 E_2 + \cdots + m_{3,4} E_3 E_4\} \{n_{1,2}|(E_1 E_2) + \cdots + n_{3,4}|(E_3 E_4)\}$$
$$= m_{1,2} n_{1,2} + m_{1,3} n_{1,3} + \cdots + m_{3,4} n_{3,4},$$
$$(CD)|(AB) = \{n_{1,2} E_1 E_2 + \cdots + n_{3,4} E_3 E_4\} \{m_{1,2}|(E_1 E_2) + \cdots + m_{3,4}|(E_3 E_4)\}$$
$$= n_{1,2} m_{1,2} + n_{1,3} m_{1,3} + \cdots + n_{3,4} m_{3,4},$$

mithin ist

$$(AB)|(CD) = (CD)|(AB),$$

so dafs auch die Faktoren dieses Produktes ohne Zeichenwechsel vertauschbar sind.

4) Mit $|(CDE) = F$ erhalten wir

$$(AB)|(CDE) = (AB)F = ABF = F(AB) = |(CDE)(AB).$$

5) Betrachten wir noch das innere Produkt aus den beiden Flächenteilen $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$. Setzen wir

$$A_1 A_2 A_3 = |A, \quad |(B_1 B_2 B_3) = B,$$

so ergiebt sich

$$(A_1A_2A_3)|(B_1B_2B_3) = (A_1A_2A_3)B = -B(A_1A_2A_3) = -B|A = -A|B$$
$$= A(B_1B_2B_3) = -(B_1B_2B_3)A$$
$$= (B_1B_2B_3)|(A_1A_2A_3),$$
$$(A_1A_2A_3)|(B_1B_2B_3) = -B(A_1A_2A_3) = -|(B_1B_2B_3)(A_1A_2A_3).$$

Indem wir behufs der Wertbestimmung des Produktes denselben Weg einschlagen, wie für das innere Produkt aus zwei Feldern, § 19 dieses Kapitels, finden wir

$$(A_1A_2A_3)|(B_1B_2B_3) = \begin{vmatrix} A_1|B_1 & A_2|B_1 & A_3|B_1 \\ A_1|B_2 & A_2|B_2 & A_3|B_2 \\ A_1|B_3 & A_2|B_3 & A_3|B_3 \end{vmatrix}.$$

§ 49. Das Produkt aus zwei Gröfsen vierter Stufe.

Gehen wir denselben Weg, welchen wir für die Wertbestimmung des Produktes aus zwei Spathen in § 20 dieses Kapitels gegangen sind, im vorliegenden Falle, so finden wir

$$(A_1A_2A_3A_4)(B_1B_2B_3B_4) = \begin{vmatrix} A_1|B_1 & A_2|B_1 & A_3|B_1 & A_4|B_1 \\ A_1|B_2 & A_2|B_2 & A_3|B_2 & A_4|B_2 \\ A_1|B_3 & A_2|B_3 & A_3|B_3 & A_4|B_3 \\ A_1|B_4 & A_2|B_4 & A_3|B_4 & A_4|B_4 \end{vmatrix}.$$

§ 50. Stereometrische Produkte aus Punkten, Linien und Ebenen.

In manchen Fällen (in der synthetischen Geometrie) handelt es sich nicht um die Kenntnis des vollen Wertes eines stereometrischen Produktes, sondern nur um dessen geometrische Bedeutung. Darüber entscheidet sofort die Summe der Stufenzahlen seiner Faktoren, resp. der verbleibende Rest, wenn wir diese Summe durch die Stufenzahl vier des Hauptgebietes teilen, ist dieser Rest gleich 0, 1, 2, 3, dann ist das Resultat eine Zahl (ein Körperteil), ein Punkt, ein Linienteil, ein Flächenteil.

Alles das, was im allgemeinen in § 34 dieses Kapitels über planimetrische Produkte gesagt wurde, gilt in entsprechender Weise auch für stereometrische Produkte, wir haben für die Stufenzahl drei dort als Stufenzahl des Hauptgebietes nur die Zahl vier zu substituieren.

Weil es dann nicht auf die Ausdehnung des Resultates ankommt, das Resultat dasselbe bleibt, gleichviel ob wir die Stufenzahl des begrenzten Gebildes oder seines Trägers in Rechnung stellen, so ist die geometrische Bedeutung der Produkte aus Punkten, Linien und Ebenen unmittelbar gegeben. Wir verstehen dann unter

1) AB die durch die Punkte A und B bestimmte gerade Linie,
2) αB oder $B\alpha$ die durch die Gerade α und den Punkt B bestimmte Ebene,
3) $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ die Schnittlinie der Ebenen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$,
4) $\alpha\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{B}\alpha$ den Schnittpunkt der Geraden α und der Ebene $\mathfrak{B}$,
5) $\alpha\beta$, $\mathfrak{A}B$ oder $B\mathfrak{A}$ Gröfsen nullter Stufe (Zahlen).

Diese Definitionen setzen voraus, dafs die Faktoren nicht vereinigt liegen, dafs unter 5) die Strahlen α und β sich kreuzen.

Liegen zwei Elemente (Faktoren) vereinigt, so ist ihr stereometrisches Produkt stets gleich Null. Es bedeutet

1) $AB = 0$ oder $A \equiv B$, dafs die Punkte A und B zusammenfallen,
2) $\alpha B = 0$ oder $B\alpha = 0$, dafs die gerade Linie α durch den Punkt B läuft, der Punkt B in der Geraden α liegt,
3) $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0$ oder $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, dafs die Ebenen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zusammenfallen,
4) $\alpha\mathfrak{B} = 0$ oder $\mathfrak{B}\alpha = 0$, dafs die Linie α in der Ebene $\mathfrak{B}$ liegt, die Ebene $\mathfrak{B}$ durch die Linie α hindurchgeht,
5) $\alpha\beta = 0$ oder $\beta\alpha = 0$, dafs die Linien α und β sich schneiden,
6) $\mathfrak{A}B = 0$ oder $B\mathfrak{A} = 0$, dafs die Ebene $\mathfrak{A}$ durch den Punkt B geht, der Punkt B in der Ebene $\mathfrak{A}$ liegt.

Ist n eine Gröfse nullter Stufe, Γ irgend ein Element des Raumes, dann ist offenbar

$$n\Gamma \equiv \Gamma.$$

Von den zuerst angeschriebenen sechs Produkten stellen die beiden ersten das verbindende Gebiet der beiden Faktoren, die beiden folgenden das Durchschnitts-, das gemeinsame Element der beiden Faktoren dar, wohingegen die Verknüpfungen unter 5) zu keinem besonderen räumlichen Elemente führen. Die Verknüpfungen 1) und 3), sowie 2) und 4) sind zueinander reziprok.

Indem wir diese sechs Produkte aus je zwei Faktoren wieder als Elemente betrachten, können wir sie aufs Neue mit anderen Elementen oder Produkten nullter Stufe multiplizieren, wodurch mehrfaktorige stereometrische Produkte erscheinen, und da wir die Faktoren in einem solchen Produkte beliebig zusammenfassen können, so ist, wenn A, B, Γ, Δ beliebige Elemente des Raumes sind,

$$\mathsf{AB\Gamma} = (\mathsf{AB})\mathsf{\Gamma},$$

$$\mathsf{AB\Gamma\Delta} = (\mathsf{AB\Gamma})\mathsf{\Delta},$$

und so fort, denn beim stereometrischen Produkte hat die Multiplikation von der Linken zur Rechten fortzuschreiten.

Die Stufenzahl eines solchen mehrfaktorigen Produktes haben wir in der am Eingange dieses Paragraphen angegebenen Weise zu bestimmen.

Das stereometrische Produkt aus drei Punkten verschwindet, wenn sie in gerader Linie liegen, sonst ist es kongruent der durch diese Punkte bestimmten Ebene. Das Produkt aus drei in einer Geraden sich schneidenden Ebenen ist gleich Null. Das Produkt aus vier Punkten ist gleich Null, wenn sie in einer Ebene liegen. Das Produkt aus vier durch einen Punkt gehenden Ebenen verschwindet.

Diese Sätze folgen unmittelbar aus den entsprechenden für begrenzte Gebilde.

Gewisse stereometrische Produkte sind von besonderem Interesse.

In dem Produkte

$$\mathfrak{P} = UA\mathfrak{B}C\mathfrak{D}E\mathfrak{F}\ldots$$

folgen auf einen Punkt abwechselnd Punkte und Ebenen. Es sei keiner seiner Faktoren mit dem nächstfolgenden inzident.

Die direkte Auswertung dieses Produktes giebt

$UA \equiv$ der durch die Punkte U und A bestimmten geraden Linie,

$(UA)\mathfrak{B} \equiv$ dem Schnittpunkte der Linie (UA) und der Ebene $\mathfrak{B}$,

$(UA\mathfrak{B})C \equiv$ der durch die Punkte $(UA\mathfrak{B})$ und C bestimmten geraden Linie,

und so fort.

Ist das Produkt

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{U}\mathfrak{B}C\mathfrak{D}E\mathfrak{F}\ldots$$

gegeben, dann haben wir

$\mathfrak{U}\mathfrak{B} \equiv$ der Schnittlinie der Ebenen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$,

$(\mathfrak{U}\mathfrak{B})C \equiv$ der durch die Linie $(\mathfrak{U}\mathfrak{B})$ und den Punkt C bestimmten Ebene,

$(\mathfrak{U}\mathfrak{B}C)\mathfrak{D} \equiv$ der Schnittlinie der Ebenen $(\mathfrak{U}\mathfrak{B}C)$ und $\mathfrak{D}$,

und so fort.

Ist das Produkt

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{U}\alpha\beta\gamma\delta\ldots$$

vorgelegt, so erhalten wir

$U\alpha \equiv$ der durch den Punkt U und die Gerade α bestimmten Ebene,

$(U\alpha)\beta \equiv$ dem Schnittpunkte der Ebene $(U\alpha)$ und der Geraden β,

$(U\alpha\beta)\gamma \equiv$ der durch den Punkt $(U\alpha\beta)$ und die Linie γ bestimmten Ebene,

und so fort.

Bei dem Produkte

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{U}\beta\gamma\delta\varepsilon$$

ist

$\mathfrak{U}\beta \equiv$ dem Schnittpunkte der Ebene $\mathfrak{U}$ und der Linie β,

$(\mathfrak{U}\beta)\gamma \equiv$ der durch den Punkt $(\mathfrak{U}\beta)$ und die Gerade γ bestimmten Ebene,

und so fort.

Diese Ergebnisse führen zu dem Satze:

Der Wert eines stereometrischen Produktes, bei welchem je zwei benachbarte Faktoren nicht inzident sind, ist stets von Null verschieden, wenn auf einen Punkt abwechselnd Punkte und Ebenen, oder wenn auf eine Ebene abwechselnd Ebenen und Punkte, oder wenn auf einen Punkt nur Linien, oder wenn auf eine Ebene nur Linien folgen.

§ 51. Vertauschbarkeit der Faktoren eines stereometrischen Produktes.

Von Wichtigkeit ist es, zu wissen, wie die Faktoren eines stereometrischen Produktes miteinander vertauscht oder vereinigt werden können, ohne dafs dadurch seine geometrische Bedeutung sich ändert.

Besteht ein stereometrisches Produkt aus nur zwei Faktoren, so bleibt es sich selbst kongruent, wenn wir seine Faktoren miteinander vertauschen.

Beispielsweise haben wir für das Produkt aus den Punkten A' und B'

$$A'B' = -B'A' = (-1)B'A' \equiv B'A',$$

mithin ist auch die Linie

$$AB \equiv BA,$$

und in derselben Art gestalten sich die Beweise für die übrigen zweifaktorigen Produkte.

Zu irgend einem Faktor, zu mehreren Faktoren, oder zu jedem Faktor eines stereometrischen Produktes läfst sich ein Faktor nullter Stufe hinzufügen, oder vor eine Reihe

von Faktoren läfst sich ein Faktor nullter Stufe setzen, ohne dafs es dadurch seinen geometrischen Karakter wechselt.

Denn es ist stets

$$n\Gamma \equiv \Gamma.$$

In einem Produkte von zwei bis vier Punkten oder Ebenen lassen sich die Faktoren beliebig vertauschen und vereinigen.

Denn das Produkt aus zwei Punkten ist kongruent der durch diese Punkte bestimmten Geraden, dasjenige aus drei Punkten kongruent der durch sie bestimmten Ebene, dasjenige aus vier Punkten kongruent dem Raume, folglich ist

$$AB \equiv BA,$$
$$ABC \equiv (AB)C \equiv A(BC) \equiv ACB \equiv BAC \equiv BCA, \ldots$$
$$ABCD \equiv (ABC)D \equiv (AB)(CD) \equiv (AC)(DB), \ldots$$

Das Produkt aus zwei Ebenen ist kongruent ihrer Schnittlinie, dasjenige aus drei Ebenen kongruent ihrem Schnittpunkte, oder Null, wenn sie nämlich in einer Geraden sich schneiden, dasjenige aus vier Ebenen ist von nullter Stufe, woraus unmittelbar der obige Satz folgt.

Die Untersuchung der Vertauschbarkeit der Faktoren eines Produktes aus beliebigen drei Faktoren führt zu dem Ergebnisse:

Ist die Summe der Stufenzahlen der Faktoren eines dreifaktorigen Produktes von beliebigen Faktoren kleiner als 5 oder gröfser als 7, dann lassen sich die Faktoren beliebig miteinander vertauschen und vereinigen.

Ist die Summe der Stufenzahlen der Faktoren gleich 5, 6 oder 7 und kein Faktor von nullter Stufe, dann ist die Ordnung, in welcher wir ein Element B mit zwei anderen Elementen A und Γ fortschreitend multiplizieren können, in zwei Fällen für den geometrischen Wert des Ergebnisses gleichgültig, es ist

$$\mathsf{BA}\Gamma \equiv \mathsf{B}\Gamma\mathsf{A}, \quad \mathsf{AB}\Gamma \equiv \mathsf{A}(\mathsf{B}\Gamma),$$

1) wenn von den beiden Faktoren A und Γ der eine ganz in dem anderen liegt,
2) wenn A und Γ gerade Linien in derselben Ebene sind und der dritte Faktor ein Punkt oder eine Ebene ist.

Für vierfaktorige Produkte existiert die Relation

$$\mathsf{AB}\Gamma\mathsf{B} \equiv \mathsf{AB}(\Gamma\mathsf{B}) \equiv \mathsf{A}(\Gamma\mathsf{B})\mathsf{B}.$$

Steht in einem klammerlosen vierfaktorigen Produkte zwischen zwei kongruenten Faktoren ein dritter Faktor, dann dürfen wir diesen mit dem folgenden durch Klammern zusammenschliefsen.

§ 52. Stereometrische Produkte nullter Stufe.

Ein stereometrisches Produkt nullter Stufe besitzt die Beschaffenheit, dafs die Summe der Stufenzahlen seiner Faktoren durch die Stufenzahl vier des Hauptgebietes ohne Rest teilbar ist.

Jedes stereometrische Produkt, also auch ein solches nullter Stufe besteht zunächst aus zwei Faktoren. Einer dieser Faktoren läfst sich immer in zwei andere Faktoren spalten, wodurch ein dreifaktoriges Produkt sich ergiebt, und die Summe der Stufenzahlen dieses Produktes ist derjenigen des ersten Produktes gleich. Weil die Stufenzahlen der einzelnen Faktoren stets kleiner als vier sind, so kann die Summe der Stufenzahlen der drei Faktoren nur entweder Null sein (wenn alle drei einzeln genommen Null sind), oder 4, oder 8. In allen drei Fällen können, wie oben bewiesen wurde, die drei Faktoren beliebig vertauscht und vereinigt werden.

Besteht ein stereometrisches Produkt nullter Stufe aus drei Faktoren, dann können dieselben beliebig vertauscht und vereinigt werden, ohne dafs dadurch sein geometrischer Wert alteriert wird.

Ist

$$\mathfrak{P} = \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_2 \ldots \mathsf{A}_{n-1} \mathsf{A}_n$$

ein stereometrisches Produkt nullter Stufe, so ergiebt sich durch dieselbe Beweisführung wie in § 35 dieses Kapitels, dafs

$$\mathsf{A}_1 \mathsf{A}_2 \ldots \mathsf{A}_{n-1} \mathsf{A}_n \equiv \mathsf{A}_n \mathsf{A}_{n-1} \ldots \mathsf{A}_2 \mathsf{A}_1$$
$$\equiv \mathsf{A}_1 (\mathsf{A}_n \mathsf{A}_{n-1} \ldots \mathsf{A}_3 \mathsf{A}_2)$$

ist.

Ein fortschreitendes stereometrisches Produkt nullter Stufe läfst sich umkehren, auch kann man es in zwei Teile sondern und den zweiten Teil umgekehrt in Klammern schliefsen.

Ist A ein beliebiges Produkt nullter Stufe und enthält dasselbe einen Faktor B von nullter Stufe, dann ist sein zweiter Faktor ebenfalls von nullter Stufe, und wir dürfen deshalb setzen

$$\mathsf{A} \equiv \mathsf{B}\Gamma,$$

in welcher Relation Α nur dann gleich Null sein kann, wenn Β oder Γ gleich Null ist.

Enthält ein stereometrisches Produkt nullter Stufe einen Faktor nullter Stufe, dann ist dieser als der eine Faktor des gesamten Produktes setzbar, der andere Faktor ist dasjenige Produkt, welches übrig bleibt, wenn wir aus dem Gesamtprodukte diesen Faktor weglassen, und das Gesamtprodukt verschwindet nur dann, wenn einer dieser Faktoren gleich Null ist.

§ 53. Stereometrische Produkte in der synthetischen Geometrie.

1) Ist A ein fester, U ein nach jeder Richtung hin variabler Punkt des Raumes, dann ist

$$\mathfrak{x} \equiv UA \qquad (1)$$

die stereometrische Gleichung des Strahlenbündels mit dem Zentrum A.

Ist α eine feste Gerade, U ein variabler Punkt des Raumes, dann ist

$$\mathfrak{U} \equiv U\alpha \qquad (2)$$

die Gleichung des Ebenenbüschels mit der Axe α.

Ist A ein fester Punkt, $\mathfrak{x}$ eine variable Gerade des Raumes, so ist

$$\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{x}A \qquad (3)$$

die Gleichung des Ebenenbündels mit dem Mittelpunkte A.

Der Kongruenz (1) ist reziprok

$$\mathfrak{x} \equiv \mathfrak{U}\mathfrak{A},$$

es giebt diese Relation die durch die Ebene $\mathfrak{U}$ linierte Ebene $\mathfrak{A}$.

Der zweiten Kongruenz (2) ist reziprok

$$U \equiv \mathfrak{U}\alpha,$$

es stellt diese Relation die durch die Ebene $\mathfrak{U}$ punktierte Gerade α dar.

Der Kongruenz (3) ist reziprok

$$U \equiv \mathfrak{x}\mathfrak{A},$$

die Gerade $\mathfrak{x}$ punktiert die Ebene $\mathfrak{A}$.

Multiplizieren wir die Seiten der Relation (1) mit $\mathfrak{A}$, so folgt

$$V \equiv UA\mathfrak{A},$$

der Schnitt des Strahlenbündels um A und der Ebene $\mathfrak{A}$.

Auf demselben Wege erhalten wir durch (2)

$$\mathfrak{x} \equiv U\alpha\mathfrak{A},$$

den Schnitt des Ebenenbüschels um α und der Ebene $\mathfrak{A}$.

Zu der letzten Relation ist reziprok

$$\xi \equiv \mathfrak{U}\alpha A,$$

diese Relation stellt das zu der Punktreihe $(\mathfrak{U}\alpha)$ perspektivische Strahlenbüschel mit dem Zentrum A dar.

Die Multiplikation von (3) mit $\mathfrak{A}$ liefert, wenn $\mathfrak{U}\mathfrak{A} \equiv \zeta$ gesetzt wird,

$$\zeta \equiv \xi A \mathfrak{A},$$

die Schnittstrahlen des Ebenenbündels (ξA) und der Ebene $\mathfrak{A}$.

2) Bilden wir ein stereometrisches Produkt, in welchem auf einen Punkt abwechselnd Punkte und Ebenen folgen, dann erhalten wir, vorausgesetzt, dafs keine zwei benachbarten Faktoren inzident sind:

$UA \equiv$ dem Strahlenbündel mit dem Zentrum A,

$UA\mathfrak{A} \equiv (UA)\mathfrak{A} \equiv$ dem Punktfelde $\mathfrak{A}$. Das Strahlenbündel (UA) und das Punktfeld $\mathfrak{A}$ liegen perspektivisch.

$UA\mathfrak{A}B \equiv (UA\mathfrak{A})B \equiv$ dem Strahlenbündel mit dem Zentrum B. Die Strahlenbündel um A und B liegen perspektivisch, denn entsprechende Strahlen schneiden sich in den Punkten der Ebene $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}$ ist der perspektivische Schnitt beider Bündel.

$UA\mathfrak{A}B\mathfrak{B} \equiv (UA\mathfrak{A}B)\mathfrak{B} \equiv$ dem Schnitte des Strahlenbündels um B und der Ebene $\mathfrak{B} \equiv$ dem Punktfelde $\mathfrak{B}$. Die Punktfelder $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ liegen perspektivisch. Das Strahlenbündel UA und das Punktfeld $\mathfrak{B}$ sind projektivisch.

Fahren wir in dieser Weise fort, so erhalten wir abwechselnd Strahlenbündel und Punktfelder.

„Folgen in einem stereometrischen Produkte auf einen variablen Punkt abwechselnd feste Punkte und feste Ebenen, und sind keine zwei benachbarten Faktoren inzident, so sind die durch ein solches Produkt gegebenen Strahlenbündel und Punktfelder perspektivisch, wenn ihre festen Elemente nur durch einen Faktor voneinander getrennt werden, sonst projektivisch."

Das zu dem eben betrachteten Produkte reziproke Produkt ist

$$\mathfrak{U}\mathfrak{A}A\mathfrak{B}B\ldots \equiv \xi A\mathfrak{B}B\ldots$$

Auf das Linienfeld $\mathfrak{A}$ folgt das Ebenenbündel mit dem Zentrum A, hierauf das Linienfeld $\mathfrak{B}$ u. s. f.

3) Wir betrachten ferner das stereometrische Produkt, in welchem auf einen variablen Punkt nur Linien als feste Faktoren folgen, von denen keine zwei benachbarten Faktoren sich schneiden. — Wir erhalten

$U\alpha \equiv$ dem Ebenenbüschel mit der Axe α.

$U\alpha\beta \equiv (U\alpha)\beta \equiv$ der Punktreihe β, welche zu $(U\alpha)$ perspektivisch liegt,

$U\alpha\beta\gamma \equiv (U\alpha\beta)\gamma \equiv$ dem Ebenenbüschel mit der Axe γ, welches zu der Punktreihe β perspektivisch liegt, so dafs die Ebenenbüschel $(U\alpha)$ und $U\alpha\beta\gamma$ perspektivische Büschel sind,

$U\alpha\beta\gamma\delta \equiv (U\alpha\beta\gamma)\delta \equiv$ der Punktreihe δ, welche mit dem Ebenenbüschel um γ und der Punktreihe β perspektivisch und dem Ebenenbüschel $(U\alpha)$ projektivisch ist,

$U\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon \equiv (U\alpha\beta\gamma\delta)\varepsilon \equiv$ dem Ebenenbüschel mit der Axe ε, welches mit dem Ebenenbüschel um γ perspektivisch, mit dem Ebenenbüschel um α projektivisch liegt.

„Folgen in einem stereometrischen Produkte auf einen variablen Punkt nur Linien, von denen keine zwei benachbarten sich schneiden, so sind die durch ein solches Produkt gegebenen Ebenenbüschel und Punktreihen perspektivisch, wenn ihre festen Elemente nur durch einen Faktor getrennt werden, im anderen Falle liegen sie projektivisch.“

Das dem eben besprochenen Produkte reziprok gegenüber stehende Produkt ist

$$\mathfrak{U}\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon \ldots \equiv U\beta\gamma\delta\varepsilon \ldots$$

welches demnach auf das erstere zurückkommt.

§ 54. Die geradlinigen Flächen zweiten Grades.

Das stereometrische Produkt

$$U\alpha\beta\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 \ldots \alpha_n\beta_n\gamma,$$

in dem je zwei benachbarte Geraden sich kreuzen, giebt die beiden projektivischen Ebenenbüschel mit den Axen α und γ. Die Ebenen $U\alpha$ und $U\alpha\beta\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 \ldots \alpha_n\beta_n\gamma$ sind entsprechende Ebenen beider Büschel, es schneiden sich diese Ebenen in einer Geraden. Die Gesamtheit der Schnittlinien aller entsprechenden Ebenenpaare der beiden projektivischen Ebenenbüschel macht eine geradlinige Fläche aus. Ist U ein Punkt dieser Fläche, so liegt er in der Ebene $U\alpha\beta\alpha_1\beta_1 \ldots \alpha_n\beta_n\gamma \equiv U\gamma$, mithin ist die stereometrische Gleichung derselben, indem $U\gamma U = 0$ ist,

$$U\alpha\beta\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 \ldots \alpha_n\beta_n\gamma U = 0, \tag{1}$$

sie enthält den variablen Punkt U zweimal, ihr stereometrisches Produkt ist von nullter Stufe, die Fläche vom zweiten Grade.

Durchwandert U die Punktreihe α, dann ist $U\alpha = 0$ und damit das ganze Produkt gleich Null, daher gehört die Axe α des Ebenenbüschels $(U\alpha)$ der Fläche an.

Es ist auch

$$U\gamma\beta_n\alpha_n \ldots \beta_2\alpha_2\beta_1\alpha_1\beta\alpha U = 0.$$

Diese Gleichung wird mit $U\gamma = 0$ befriedigt, folglich gehört auch die Axe γ des zweiten Ebenenbüschels $(U\gamma)$ der Fläche an.

Ist P ein beliebiger Punkt der Fläche, so liegt er gleichzeitig in den Ebenen $(P\alpha)$ und $(P\alpha\beta\alpha_1\beta_1 \ldots \alpha_n\beta_n\gamma)$, in deren Schnittlinie, so dafs jeder Punkt dieser Linie der Fläche genügt. In diesen Ebenen liegen die Geraden α und γ resp., mithin geht die Schnittlinie durch die Axen α und γ der beiden projektivischen Ebenenbüschel. Jede Erzeugende der Fläche schneidet die Axen der beiden projektivischen Ebenenbüschel.

„Das Erzeugnis zweier projektivischen Ebenenbüschel ist eine geradlinige Fläche, welcher die Axen dieser Büschel angehören.“

Die Axen α und γ kreuzen oder schneiden sich.

a) Die Axen α und γ kreuzen sich.

Wie bei projektivischen Punktreihen und Strahlenbüscheln, so wird auch bei projektivischen Ebenenbüscheln durch drei Paare entsprechende Elemente zu jedem vierten Elemente des einen Gebildes das entsprechende des anderen, also hier das ganze Durchschnittsgebilde bestimmt. Dadurch ist es möglich, die Gleichung (1) zu reduzieren, die Anzahl der in ihr vorkommenden festen Geraden auf ein Minimum zu beschränken.

Setzen wir

$$\alpha\beta\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 \ldots \alpha_n\beta_n\gamma = \mathfrak{R},$$

dann nimmt die (1) die Form an

$$U\mathfrak{R}U = 0. \tag{2}$$

Den drei Ebenen $U_1\alpha$, $U_2\alpha$, $U_3\alpha$ des Ebenenbüschels um α entsprechen der Reihe nach die drei Ebenen $U_1\mathfrak{R}$, $U_2\mathfrak{R}$, $U_3\mathfrak{R}$ des Ebenenbüschels um γ. Entsprechende Ebenen der beiden Büschel können nicht zusammenfallen, denn α und γ kreuzen sich. Daher ist

$$(U_1\alpha)(U_1\mathfrak{R}) \equiv \delta_1, \quad (U_2\alpha)(U_2\mathfrak{R}) \equiv \delta_2, \quad (U_3\alpha)(U_3\mathfrak{R}) \equiv \delta_3,$$

es sind δ_1, δ_2 und δ_3 drei Erzeugende der geradlinigen Fläche, von denen jede die Axen α und γ schneidet, und keine zwei dieser Linien liegen in derselben Ebene, denn es ist $\alpha\gamma \gtrless 0$. Legen wir nun eine Gerade σ so, dafs sie δ_1, δ_2 und δ_3 schneidet, $\sigma \gtrless \alpha$ und $\sigma \gtrless \gamma$ ist,

was in den Punkten D_1, D_2 und D_3 resp. geschehen möge, dann gehören die Gleichungen

$$U\mathfrak{R}U = 0, \tag{2}$$

$$U\alpha\sigma\gamma U = 0 \tag{3}$$

derselben geradlinigen Fläche an.

Die entsprechenden Ebenen $U_1\alpha$ und $U_1\mathfrak{R}$ enthalten beide die Gerade δ_1, also auch den Punkt D_1, welcher auf ihr liegt, durch D_1 gehen die entsprechenden Ebenen $D_1\alpha$ und $D_1\alpha\sigma\gamma \equiv D_1\gamma$, es fällt mithin $U_1\alpha$ mit $D_1\alpha$ und $U_1\mathfrak{R}$ mit $D_1\gamma$ zusammen, so dafs $U_1\alpha \equiv D_1\alpha$, $U_1\mathfrak{R} \equiv D_1\gamma$ ist, beide entsprechenden Ebenenpaare $U_1\alpha$ und $U_1\mathfrak{R}$, sowie $D_1\alpha$ und $D_1\gamma$ sich in derselben, durch α und γ hindurchgehenden Geraden schneiden, die der Fläche (2) und der Fläche (3) angehört und δ_1 ist. Ebenso erkennen wir, oder wenn wir nacheinander D_2 und D_3 für D_1 substituieren, dafs auch δ_2 und δ_3 beiden Flächen zugleich angehören. Die drei Ebenenpaare $D_1\alpha$ und $D_1\gamma$, $D_2\alpha$ und $D_2\gamma$ und $D_3\alpha$ und $D_3\gamma$ sind daher Paare entsprechender Ebenen sowohl in den beiden projektivischen Ebenenbüscheln, welche die Fläche (2), als auch in denjenigen, welche die Fläche (3) erzeugen, mithin sind diese beiden Flächen identisch.

Schneiden sich daher in der stereometrischen Gleichung (1) keine zwei aufeinander folgenden Geraden und schneidet auch die letzte die erste nicht, so läfst die Reihe der Geraden $\beta\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 \ldots \alpha_n\beta_n$ stets auf eine Gerade sich zurückführen, welche sowohl die erste als auch die letzte Gerade kreuzt.

Weil die Erzeugenden δ der Fläche nicht nur α und γ, sondern auch σ schneiden, die Punkte D der Fläche auf σ liegen, so gehört auch σ der Fläche an. Daher besteht die Fläche (1) aus der gesamten Linienschaar, welche die drei sich kreuzenden Geraden α, σ und γ schneidet.

Legen wir durch die beiden projektivischen Ebenenbüschel irgend eine Ebene $\mathfrak{E}$, welche α und γ in A und C resp. schneidet, so ist

$$U\alpha\mathfrak{E} \equiv UA, \quad U\alpha\sigma\gamma\mathfrak{E} \equiv UC,$$

$$UA\mathfrak{E} = 0, \qquad UC\mathfrak{E} = 0.$$

Die beiden in der Ebene $\mathfrak{E}$ liegenden Strahlenbüschel UA und UC sind projektivisch, das Erzeugnis derselben, der Ort des Punktes U, welcher der Fläche angehört, ist eine Kurve zweiter Ordnung, und weil jede Gerade in $\mathfrak{E}$, die nicht der Fläche angehört, diese Kurve in zwei Punkten höchstens schneidet, so schneidet eine beliebige Gerade die Fläche höchstens in zwei Punkten.

„Jede Ebene schneidet die Fläche in einer Kurve zweiter Ordnung, und jede Gerade, welche nicht in der Fläche liegt, schneidet die letztere in zwei Punkten. Daher heifst unsere Fläche eine solche zweiter Ordnung."

Irgend eine Erzeugende δ schneidet die Geraden α, γ und σ in den Punkten A, C und D resp., so dafs σ und δ eine Ebene bestimmen, welche aus α und γ die Punkte A und C herausschneidet. Legen wir nun durch σ als Axe ein Ebenenbüschel, so schneidet dasselbe aus α und γ zwei projektivische Punktreihen heraus und entsprechende Punkte dieser Reihen sind Punkte ein und derselben Erzeugenden.

„Das Erzeugnis zweier projektivischen Punktreihen auf windschiefen Trägern ist eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung."

Die Gerade σ war eine beliebige Gerade, die drei Erzeugende der Schaar (δ) und damit alle Geraden dieser Schaar schneidet, also der Fläche angehört. Alle Geraden (σ), welche δ_1, δ_2 und δ_3 schneiden, liegen somit ebenfalls auf der Fläche, so dafs eine zweite Schaar (σ) von Erzeugenden vorhanden ist, zu denen α und γ gehören. Jede Gerade der einen Schaar schneidet sämtliche Geraden der anderen Schaar.

Schneiden sich in

$$U \mathfrak{R} U = 0$$

irgend zwei aufeinander folgende festen Geraden, etwa α_r und β_r, so ist, wenn $\mathfrak{A}_r$ die durch sie bestimmte Ebene und A_r ihren Schnittpunkt bedeutet, $\alpha_r \beta_r \equiv \mathfrak{A}_r A_r = 0$, weshalb wir sie durch $\mathfrak{A}_r$ und A_r ersetzen können, wodurch wir erhalten

$$U \alpha \beta \alpha_1 \beta_1 \cdots \alpha_{r-1} \beta_{r-1} \mathfrak{A}_r \cdot A_r \alpha_{r+1} \beta_{r+1} \cdots \alpha_n \beta_n \gamma U = 0.$$

Dadurch zerfällt das stereometrische Produkt in zwei Partialprodukte nullter Stufe, welche durch einen Punkt getrennt sind, und wir dürfen schreiben

$$U (\mathfrak{A}_r \beta_{r-1} \alpha_{r-1} \cdots \beta \alpha) \cdot A_r \alpha_{r+1} \beta_{r+1} \cdots \alpha_n \beta_n \gamma U = 0.$$

Damit diese Gleichung befriedigt werde, kann entweder

$$\mathfrak{A}_r \beta_{r-1} \alpha_{r-1} \cdots \beta \alpha = 0 \text{ oder } A_r \alpha_{r+1} \beta_{r+1} \cdots \alpha_n \beta_n \gamma = 0$$

sein, und dann genügt jeder Punkt U der vorstehenden Gleichung, so dafs in diesem Falle die Fläche ganz unbestimmt ist.

Die einfachste Form der Gleichung (1) ist

$$U \alpha U = 0,$$

es befriedigt diese Gleichung jeder Punkt des Raumes.

Verschwindet keines der beiden obigen Produkte, so stellen diese Ebenen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dar, und es ist

$$U\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} U = 0.$$

Dieser Gleichung wird genügt mit $U\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} U = 0$. Daher zerfällt die Fläche zweiter Ordnung in zwei Ebenen, wenn zwei aufeinander folgende Geraden in (1) sich schneiden und nicht jeder Punkt des Raumes die (1) befriedigt. Denken wir uns die beiden Ebenen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, einen beliebigen Punkt C ihrer Schnittlinie, die Geraden CA und CB in $\mathfrak{A}$, und eine Gerade γ in $\mathfrak{B}$, welche nicht durch C geht, so ist $\mathfrak{A} \equiv CAB$, $\mathfrak{B} \equiv C\gamma$, womit die Gleichung der Fläche wird

$$UCAB \cdot C\gamma U = 0, \quad UCA(BC)\gamma U = 0,$$

wenn nun die Gerade γ durch den Punkt C geht, so wird der Punkt U und damit die Fläche unbestimmt.

Ist die Gleichung der Fläche

$$U\alpha\sigma\gamma U = 0,$$

$\alpha \equiv PA$, $\sigma \equiv QP$, so dafs sich also α und σ in P schneiden, dann ist

$$U(PA)(QP)\gamma U = 0, \quad P\gamma U = 0,$$

$$U\gamma(QP)(PA) U = 0, \quad R\alpha U = 0, \quad \text{mit } RPQ = 0,$$

mithin zerfällt die Fläche in die Ebenen $(P\gamma)$ und $(\alpha\sigma)$.

Mit $\alpha \equiv PA$, $\sigma \equiv QP$, $\gamma \equiv CQ$, so dafs α und σ in P, σ und γ in Q sich schneiden, erhalten wir

$$U(PA)(QP)(CQ) U = 0, \quad PCQU \equiv P\gamma U = 0,$$

$$U(CQ)(QP)(PA) U = 0, \quad QPAU \equiv Q\alpha U = 0.$$

Die Fläche zerfällt in die durch α und σ, sowie durch γ und σ bestimmten Ebenen.

b) Die Axen α und γ der beiden projektivischen Ebenenbüschel schneiden sich in einem Punkte S.

Mit $\alpha \equiv AS$ und $\gamma \equiv SC$ ist dann die Gleichung der Fläche

$$U(AS)\beta\alpha_1\beta_1 \dots \alpha_n\beta_n(SC) U = 0.$$

Die beiden Ebenenbüschel, also auch die Schnittlinien entsprechender Ebenen haben den Punkt S gemein. Die Erzeugenden der Fläche schneiden sich im Punkte S, sie ist eine Kegelfläche zweiter Ordnung mit der Spitze S, denn jede Ebene schneidet sie in einer Kurve zweiter Ordnung. Die Kegelfläche ist durch ihre Spitze und einen

solchen Schnitt ebenfalls bestimmt, es gehören ihr die Axen α und γ an. Sind A und C (Fig. 53) die Punkte, in denen die Axen α und γ die Ebene $\mathfrak{E}$ schneiden, dann ist die Gleichung des Schnittes der Fläche und dieser Ebene

$$UA\delta E\zeta CU = 0,$$

und die Gleichung der Kegelfläche ist

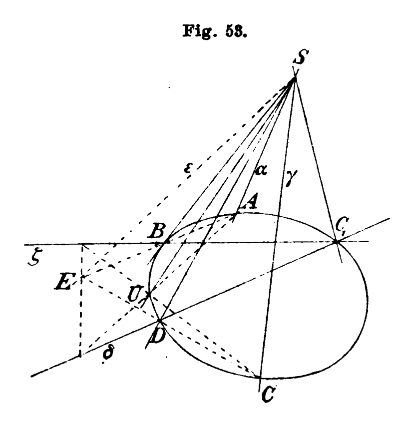
$$USA\delta(SE)\zeta(SC)U = 0,$$

oder

$$U\alpha\delta\varepsilon\zeta\gamma U = 0, \quad \text{mit} \quad SE \equiv \varepsilon,$$

wovon wir uns leicht überzeugen, wenn wir an Hand der Figur die Bedeutung des letzten Produktes entwickeln.

Fig. 53.



Daraus geht hervor, dafs jede Kegelfläche zweiter Ordnung durch eine Gleichung von der Form (1) mit fünf Geraden sich darstellen läfst, von denen die erste und die fünfte der Fläche angehören. Degeneriert der Kegelschnitt in zwei gerade Linien, dann degeneriert die Kegelfläche in zwei Ebenen.

Ist die Gleichung der Fläche

$$U\alpha\sigma\gamma U = 0,$$

ist $\alpha \equiv AS$, $\gamma \equiv SC$, also $\alpha\gamma = 0$, schneiden sich α und γ in S, dann ist

$$U(AS)\sigma(SC)U = 0.$$

Gehen wir von einem beliebig gelegenen Punkte U aus, der nicht mit der Ebene der Axen zusammenfällt, so zeigt diese Gleichung, dafs ihr alle Strahlen, welche durch S und die Punktreihe σ bestimmt sind, genügen, das sind die Schnittlinien entsprechender Ebenen der beiden projektivischen Ebenenbüschel, welche in ihrer Gesamtheit die Ebene $(S\sigma)$ ausmachen. Lassen wir den Punkt U in die Ebene der Axen fallen, so zeigt sich, dafs jeder Punkt dieser Ebene der Gleichung genügt. Mithin zerfällt die Kegelfläche in die beiden durch S und σ, sowie durch α und γ bestimmten Ebenen.

Schneiden sich die drei Geraden α, σ und γ in einem Punkte S, dann zerfällt die Kegelfläche in die beiden Ebenen, welche bestimmt sind durch α und σ, sowie durch σ und γ. Liegen die drei Geraden α, σ und γ in einer Ebene, dann besteht die Kegelfläche aus zwei mit dieser Ebene zusammenfallenden Ebenen.

c) Der letzte Spezialfall ist noch der, dafs die Axen α und γ der beiden projektivischen Ebenenbüschel koinzidieren, es ist alsdann

$$U\alpha\beta\alpha_1\beta_1\ldots\alpha_n\beta_n\alpha U = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung der durch diese Büschel erzeugten Fläche.

Weil mit $U\alpha = 0$ das ganze stereometrische Produkt verschwindet, so ist die Axe α eine Gerade der Fläche, ebenso ist die Axe des zweiten Ebenenbüschels eine Gerade der Fläche, so dafs letztere eine Doppellinie aufweist. Wird die Gleichung durch einen aufserhalb α liegenden Punkt U befriedigt, dann fallen die Ebenen $U\alpha$ und $U\alpha\beta\alpha_1\beta_1\ldots\alpha_n\beta_n\alpha$ zusammen und es genügt der Gleichung jeder Punkt der Ebene $U\alpha$, so dafs umgekehrt die Ebene $U\alpha$ der Fläche angehört. Jede mit α nicht zusammenfallende Gerade wird eine gewisse Anzahl von Punkten mit der Fläche gemein haben und es müssen diese Punkte die (1) befriedigen. Wählen wir die Gerade β_n als Schnittgerade, dann müssen die fraglichen Punkte U auf β_n liegen, deshalb ist dann

$$U\alpha\beta\alpha_1\beta_1\ldots\alpha_n\beta_n\alpha U \equiv U\alpha\beta\alpha_1\beta_1\ldots\alpha_n U\beta_n\alpha = 0,$$

und weil das Produkt $\beta_n\alpha$ einer Zahl kongruent ist, so ergiebt sich

$$U\alpha\beta\alpha_1\beta_1\ldots\beta_{n-1}\alpha_n U = 0, \qquad (2)$$

welche Gleichung eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung darstellt. Die Punkte, welche diese Fläche und die Gerade β_n gemein haben, sind Punkte der gegebenen Fläche. In Bezug hierauf giebt es vier verschiedene Fälle. Entweder gehört β_n ganz der Hülfsfläche (2) an, oder sie hat zwei Punkte, oder einen, oder keinen Punkt mit ihr gemein. Im ersten Falle genügt jeder Punkt des Raumes der Gleichung (1). Im zweiten Falle besteht die Fläche (1) aus den Ebenen, welche durch α und die beiden (reellen) Schnittpunkte von β_n mit der Hülfsfläche (2) bestimmt sind. Im dritten Falle bildet eine Doppelebene die Fläche (1). Im letzten Falle besteht die Fläche aus einer mit α zusammenfallenden Doppellinie, einer konjugierten Geraden.

Nur der letzte Fall giebt uns eine neue Art von Flächen zweiter Ordnung. Die einfachste Form ihrer Gleichung ist $U\alpha = 0$, welche aber nicht stereometrisch ist, auch nicht ausdrückt, dafs α Doppellinie ist. Die Gleichung $U\alpha\delta\alpha U = 0$ giebt diese Fläche ebenfalls nicht, denn ihr genügt jeder Punkt U des Raumes. Nehmen wir dagegen

$$U\alpha\delta\varepsilon\zeta\alpha U = 0 \qquad (3)$$

als allgemeine Gleichung der Fläche (1), so ist $U\alpha\delta\varepsilon U = 0$ die Hülfsfläche, und hat nun die Gerade ζ mit dieser keinen Punkt gemein, so besteht die Fläche aus einer Doppellinie.

Demnach giebt es fünf Gattungen geradliniger Flächen zweiter Ordnung, die sich durch stereometrische Gleichungen zweiten Grades darstellen lassen, wobei das stereometrische Produkt von nullter Stufe ist.

1) Die geradlinigen aus zwei Schaaren von Erzeugenden bestehenden Flächen zweiter Ordnung. Dieselben zerfallen in zwei Arten, denn es gehen entweder sämtliche Erzeugenden durch die Endlichkeit, so dafs keine Erzeugende ganz in der unendlich fernen Ebene des Raumes liegt, oder es befinden sich zwei Erzeugende in dieser Ebene, was eintritt, wenn der Schnitt der unendlich fernen Ebene und der Fläche eine aus zwei Geraden bestehende Kurve zweiter Ordnung ist. Im ersten Falle heifst die Fläche ein einschaaliges Hyperboloid, im zweiten ein hyperbolisches Paraboloid.

2) Der Verein zweier verschiedenen Ebenen.

3) Der Verein zweier zusammenfallenden Ebenen.

In diesen drei Fällen ist die einfachste Form der stereometrischen Gleichung

$$U\alpha\sigma\gamma U = 0.$$

Liegen von den drei Geraden α, γ und σ keine zwei in derselben Ebene, so giebt diese Gleichung eine Fläche mit zwei Schaaren geradliniger Erzeugenden. Schneiden sich zwei von diesen Geraden und liegt die dritte Gerade nicht in der Ebene der beiden ersten, dann besteht die Fläche aus zwei verschiedenen Ebenen, und befinden sich die drei Geraden in einer Ebene, so degeneriert sie in eine Doppelebene.

4) Die Kegelfläche zweiter Ordnung.

Diese geht in einen Zylinder über, wenn ihre Spitze unendlich fern rückt, wenn die Axen der beiden projektivischen Ebenenbüschel parallel sind.

5) Die konjugierte Gerade.

In den beiden letzten Fällen ist die einfachste Form der stereometrischen Gleichung

$$U\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon U = 0.$$

Diese Gleichung giebt die Kegelfläche, wenn α und ε sich schneiden, aber keine zwei der aufeinander folgenden Geraden, noch die Punkte der Ebene $\mathfrak{A}$, in der α und ε sich befinden, der Gleichung genügen. Das Letztere findet statt, wenn die Gerade γ so liegt, dafs sie von der Geraden $\mathfrak{A}\beta(\mathfrak{A}\delta)$ geschnitten wird. Fallen α und ε zusammen, und trifft δ die Fläche, deren Gleichung $U\alpha\beta\gamma U = 0$ ist, nicht, so besteht die Fläche aus einer Doppellinie.

d) Die zu der Gleichung (1) unter a) reziproke Gleichung lautet

$$\mathfrak{U}\alpha\beta\alpha_1\beta_1\ldots\alpha_n\beta_n\gamma\mathfrak{U}=0,$$

welche die stereometrische Gleichung einer geradlinigen Fläche zweiter Klasse ausmacht, und die auf die Form

$$\mathfrak{U}\alpha\sigma\gamma\mathfrak{U}=0$$

gebracht werden kann.

Ist $\mathfrak{U}$ irgend eine Ebene, so ist $\mathfrak{U}\alpha\equiv A\equiv$ einem Punkte auf α, $\mathfrak{U}\alpha\sigma\equiv A\sigma\equiv$ der Ebene durch A und σ, $\mathfrak{U}\alpha\sigma\gamma\equiv A\sigma\gamma\equiv C\equiv$ einem Punkte auf γ, $\mathfrak{U}\alpha\sigma\gamma\mathfrak{U}\equiv A\sigma\gamma\mathfrak{U}\equiv C\mathfrak{U}=0$. Mithin mufs C in der Ebene $\mathfrak{U}$ liegen, und weil auch A in ihr liegt, so ist AC eine Gerade der Fläche. Aber die Punkte A und C befinden sich in einer durch σ gehenden Ebene, daher schneiden die Ebenen des Ebenenbüschels mit der Axe σ auf α und γ projektivische Punktreihen aus, deren entsprechende Punkte Elemente von Geraden der Fläche sind.

„Eine geradlinige Fläche zweiter Klasse ist das Erzeugnis zweier projektivischen Punktreihen auf windschiefen Trägern.“

Aber auch eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung ist ein solches Erzeugnis, wodurch wir zu dem Satze gelangen:

„Geradlinige Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse sind identische Flächen.“

In den bereits genannten Bänden des Journals von Crelle findet der Leser weitere Abhandlungen über Flächen mittelst stereometrischer Produkte von Grafsmann selbst.

§ 55. Addition von Flächenteilen.

1) Sind ABC und DEF zwei Flächenteile in derselben Ebene, setzen wir $DEF=ABG$, dann erhalten wir

$$ABC+DEF=ABC+ABG=AB(C+G)=AB2S,$$

mit $C+G=2S$, folglich ist

$$ABC+DEF=2ABS,$$

und sind die beiden Flächenteile entgegengesetzt gleich, ist

$$ABG=-ABC,$$

so wird

$$ABC+DEF=ABC-ABC=0.$$

„Die Summe aus zwei Flächenteilen in derselben Ebene ist wieder ein Flächenteil, sie verschwindet, wenn die Flächenteile entgegengesetzt gleich sind.“

2) Seien ABC und DEF zwei Flächenteile in nicht parallelen, in der Geraden γ sich schneidenden Ebenen.

Ist MN ein endlicher Linienteil in γ, so dürfen wir stets setzen

$$ABC = MNP, \quad DEF = MNQ,$$

wodurch wir erhalten

$$ABC + DEF = MNP + MNQ = MN(P + Q) = MN2S$$
$$= 2MNS, \quad \text{mit } 2S = (P + Q).$$

Wir können aber auch schreiben

$$ABC + DEF = MNP + MNQ = MN(P - N) + MN(Q - N)$$
$$= MN\{(P - N) + (Q - N)\}$$
$$= M(N - M)\{(P - N) + (Q - N)\}.$$

„Die Summe aus zwei endlich entfernten Flächenteilen in nicht parallelen Ebenen ist äquivalent einem Flächenteile, seine Ebene geht durch die Schnittlinie dieser Ebenen, das ihm entsprechende Parallelogramm ist gleich der Summe der Parallelogramme der Posten. Reduzieren wir die Parallelogramme der Posten auf solche mit gemeinsamer Seite in der Schnittlinie, dann ist die fehlende Seite des Summenparallelogrammes gleich der Summe der beiden anderen Seiten der Postenparallelogramme, die in einem Punkte zusammentreffen, und die Ebene des Summenflächenteiles geht durch diese Summenstrecke, welche die Verbindungsstrecke der nicht gemeinsamen Eckpunkte der beiden Parallelogramme halbiert."

Ist O ein beliebiger Punkt des Raumes, dann ist

$$OABC + ODEF = 2OMNS$$
$$= O(M - O)(N - M)\{(P - N) + (Q - N)\}.$$

„Die Pyramidensumme zweier Flächenteile in zwei sich schneidenden Ebenen in Beziehung auf irgend einen Punkt des Raumes ist äquivalent der Pyramide über ihrer Summe bezüglich desselben Punktes. Fällt der Beziehungspunkt in die Schnittlinie der Träger der beiden Flächenteile, dann verschwinden sämtliche Pyramiden."

3) Die Ebenen, in welchen die zu addierenden Flächenteile ABC und DEF liegen, seien parallel.

Jetzt erhalten wir

$$ABC + DEF = A(B - A)(C - A) + D(E - D)(F - D)$$
$$= A(B - A)(C - A) + Dm(B - A)(C - A),$$

denn es ist $(E-D)(F-D)=m(B-A)(C-A)$, $m \gtrless 0$, je nachdem die Flächenteile gleichen oder entgegengesetzten Entstehungssinnes sind, mithin ergiebt sich

$$ABC+DEF=(A+mD)(B-A)(C-A)$$
$$=(1+m)S(B-A)(C-A),$$

mit $A+mD=(1+m)S$,

$$ABC+DEF=S\{(B-A)(C-A)+(E-D)(F-D)\}.$$

„Die Summe aus zwei parallelen Flächenteilen ist wieder ein Flächenteil, welcher zu den Posten parallel ist, sein Spatheck ist gleich der Summe der Spathecke der Posten, seine Ebene liegt so, dafs sie von den Ebenen der Posten im umgekehrten Verhältnisse der Flächenzahlen der Posten absteht. Sind die zu addierenden Flächenteile gleichen Sinnes, dann liegt die Ebene der Summenfläche zwischen den Ebenen der Posten, im anderen Falle aufserhalb des durch diese Ebenen begrenzten Raumes und zwar zunächst dem absolut gröfsten Posten, denselben Entstehungssinn wie dieser aufweisend.“

Multiplizieren wir die letzte Gleichung mit einem beliebigen Punkte O des Raumes, so ergiebt sich

$$OABC+ODEF=O(S-O)\{(B-A)(C-A)+(E-D)(F-D)\},$$

welches Ergebnis leicht in Worte gefafst werden kann.

Sind die beiden Flächenteile entgegengesetzt gleich, dann ist $m=-1$, mithin

$$ABC+DEF=0S\{(B-A)(C-A)\},$$

und weil $0S=(A-D)$ ist, so folgt

$$ABC+DEF=(A-D)(B-A)(C-A)=(B-A)(C-A)(A-D)$$

auch ist

$$OABC+ODEF=O(B-A)(C-A)(A-D).$$

„Die Summe aus zwei parallelen, entgegengesetzt gleichen Flächenteilen ist äquivalent dem äufseren Produkte aus drei Strecken, gleich dem Spathe, welcher den ersten Posten zur Grundfläche hat und dessen Deckfläche in der Ebene des zweiten Flächenteiles liegt. Die Summe der Momente der beiden Flächenteile ist für jeden Punkt des Raumes dieselbe.“

Die vorletzte Gleichung läfst sich auch schreiben

$$ABC+(B-A)(C-A)(D-A)=DFE.$$

„Die Summe eines Flächenteiles und des äufseren Produktes aus drei Strecken, von denen die beiden ersten ein dem Parallelogramme des Flächenteiles kongruentes Parallelogramm bilden, ist äquivalent einem mit dem ersten parallelen, inhaltsgleichen und gleichbezeichneten Flächenteile, welcher eine solche Lage hat, dafs der über beiden Flächenteilen konstruierte Körperraum mit dem Spathe inhaltsgleich und gleich bezeichnet ist.“

4) Sind $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_k, \ldots \mathfrak{A}_n$ Flächenteile in beliebigen Ebenen, bedenken wir, dafs $\mathfrak{A}_k = |(a_k A_k)$ ist, dann ist die Summe dieser Flächenteile

$$\sum_{k=1}^{k=n} \mathfrak{A}_k = \sum_{k=1}^{k=n} |(a_k A_k) = |\sum_{k=1}^{k=n} a_k A_k = |(a A) = \mathfrak{A}.$$

Ist insbesondere $a = 0$, dann ist

$$\sum_{k=1}^{k=n} \mathfrak{A}_k = |(0 A) = |(M - N) = |M - |N = M_1 M_2 M_3 - N_1 N_2 N_3.$$

Es verschwindet die Differenz dieser Flächenteile, wenn sie einander gleich sind, d. h. in derselben Ebene liegen, dieselbe Ausdehnung und denselben Entstehungssinn aufweisen, und damit auch die Summe der gegebenen Flächenteile. Liegen hingegen diese Flächenteile in parallelen Ebenen und sind sie einander gleich, dann ist nach 3) das Ergebnis ein Spath.

„Die Summe von beliebig vielen und beliebig gelegenen Flächenteilen ist im allgemeinen einem Flächenteile in einer bestimmten Ebene gleich, oder sie verschwindet. Resultieren durch die Summation mittelst des Ergänzungsbegriffes zwei Flächenteile, was stets eintritt, wenn die Summe der Koeffizienten der Punktgröfsen gleich Null ist, dann verschwindet die Summe, wenn die Flächenteile in derselben Ebene liegen und einander gleich sind, befinden sie sich in parallelen Ebenen, haben sie gleiche Ausdehnungen und denselben Entstehungssinn, so ist die Summe ein Spath, in jedem anderen Falle ist sie ein Flächenteil.“

§ 56. Addition von Linienteilen.

1) Seien zu addieren die Linienteile $A_1 B_1, A_2 B_2, \ldots A_k B_k, \ldots A_n B_n$, welche auf den Strahlen eines Strahlenbündels mit dem Mittelpunkte O liegen.

Weil wir setzen dürfen $A_k B_k = OB'_k$, so ergiebt sich

$$\sum_{k=1}^{k=n} A_k B_k = \sum_{k=1}^{k=n} O B'_k = O \sum_{k=1}^{k=n} B'_k = n O R', \quad \text{mit} \quad \sum_{k=1}^{k=n} B'_k = n R',$$

oder

$$\sum_{k=1}^{k=n} A_k B_k = \sum_{k=1}^{k=n} O B'_k = \sum_{k=1}^{k=n} O(B'_k - O) = O \sum_{k=1}^{k=n} (B'_k - O)$$

$$= O(R - O) = OR, \quad \text{mit} \quad \sum_{k=1}^{k=n} (B'_k - O) = (R - O).$$

Das Spatheck des äufseren Produktes aus einem Punkte und einem Linienteil nennen wir die Momentenfläche, das Moment des Linienteiles für diesen Punkt.

Ist M ein beliebiger Punkt des Raumes, so giebt das letzte Resultat

$$M \sum_{k=1}^{k=n} A_k B_k = MOR = M(O - M)(R - O).$$

„Die Summe eines Vereins von Linienteilen auf den Strahlen eines Strahlenbündels ist äquivalent einem Linienteile, sein Träger geht durch den Mittelpunkt des Strahlenbündels und seine Strecke ist gleich der Summe der Strecken der gegebenen Linienteile. Die Summe der Momentenflächen der gegebenen Linienteile in Bezug auf irgend einen Punkt des Raumes ist gleich der Momentenfläche des resultierenden Linienteiles bezüglich desselben Punktes.“

2) Sind AB und CD zwei parallele Linienteile, so ist ihre Summe zunächst

$$AB + CD = A(B - A) + C(D - C),$$

Aber es ist $(D - C) = m(B - A)$, $m \gtrless 0$, je nachdem die beiden Linienteile gleich- oder gegenläufig sind, wodurch sich ergiebt

$$AB + CD = A(B - A) + mC(B - A) = (A + mC)(B - A).$$

Setzen wir jetzt $A + mC = (1 + m)S$, so erhalten wir

$$AB + CD = S(1 + m)(B - A) = S\{(B - A) + (D - C)\}$$
$$= S(R - S) = SR,$$

$$AB + CD = S\{(B + D) - (A + C)\},$$

oder, mit $\qquad B + D = 2F, \quad A + C = 2E,$

d. i. $\qquad 2(F - E) = (B - A) + (D - C),$

$$AB + CD = 2S(F - E) = 2(SF - SE) = SR.$$

Die Multiplikation der Gleichung

$$AB + CD = SR$$

mit dem beliebigen Punkte M giebt

$$MAB + MCD = MSR.$$

Tritt der Spezialfall ein, dafs $m = -1$ ist, dafs die beiden Linienteile entgegengesetzt gleiche Strecken besitzen, dann ist

$$AB + CD = 0S(B - A) = (A - C)(B - A) = (B - A)(C - A),$$
$$M(AB + CD) = M(B - A)(C - A).$$

„Die Summe zweier parallelen Linienteile, deren Strecken nicht entgegengesetzt gleich sind, ist ein zu diesen Linienteilen paralleler Linienteil, seine Strecke ist gleich der Summe der Strecken der gegebenen Linienteile, er liegt in der Ebene der Posten. Der Schnittpunkt S des Trägers der Summe und der durch die Anfangselemente der Linienteile AB und CD bestimmten Linie befindet sich zwischen A und C, wenn die Posten gleichen Sinnes sind, und teilt die Strecke $(C - A)$ in umgekehrtem Verhältnisse ihrer Längen, aufserhalb dieser Strecke auf ihrem Träger zunächst dem absolut gröfsten Posten, wenn sie gegenläufig sind. Im ersten Falle ist die Resultante (die Summe) mit den Komponenten (Posten) gleichen Sinnes, im zweiten sind sie und die absolut gröfste Komponente gleichläufig. Die Summe der Momente der Komponenten ist gleich dem Momente der Resultanten bezüglich eines jeden Punktes des Raumes.“

Sind AB und CD (Fig. 54) die Posten, welche hier entgegengesetzten Sinn besitzen, so ergiebt sich der Summenpunkt S dadurch, dafs wir $(B' - C) = (A - B)$, $(D' - A) = (D - C)$ machen und den Strahl $D'B'$ ziehen, welcher den Strahl AC in S schneidet. Denn es ist

Fig. 54.

$$AS = \frac{m}{m-1} AC, \quad CS = \frac{1}{m-1} AC,$$

also

$$AS : CS = m = mAB : AB$$
$$= (A - D') : (C - B').$$

Zeichnen wir weiter $R - S = D - B' = (B - A) + (D - C) = 2(F - E)$, wobei E und F die Halbierungspunkte der Strecken $(C - A)$ und $(D - B)$ sind, so ist $(R - S)$ gleich der Strecke des resultierenden Linienteiles SR, welcher auf dem Strahle der Punkte S und R willkürlich verschiebbar ist und in der Ebene der Komponenten liegt. — Die Figur zeigt die Hälften der Momentenflächen für den beliebigen Punkt M.

„Die Summe zweier parallelen Linienteile mit entgegengesetzt gleichen Strecken, eines Linienteilpaares ist äquivalent einem unendlich fernen Linienteile von einer Länge gleich den Längen der Posten, äquivalent der Fläche eines Spatheckes, welches dem Parallelogramme über den Posten gleich ist. Das Moment eines Linienteilpaares ist für jeden Punkt des Raumes dasselbe, gleich seiner Summe."

Wir setzen

$$AB + CD = (A - C)(B - A) = |\,\gamma$$

und nennen γ das Axenmoment des Linienteilpaares, so dafs durch γ sowohl die Summe als auch das Moment des Paares gegeben ist. Offenbar ist auch $|\,\gamma$ das Moment des Linienteiles AB in Bezug auf den Punkt C.

3) Ist AB irgend ein Linienteil und O ein beliebiger Punkt des Raumes, dann ist

$$AB = A(B - A) = \{O + (A - O)\}(B - A),$$
$$AB = O(B - A) + (A - O)(B - A),$$

und wenn wir $(B - A) = \varkappa$, $(A - O) = \varrho$, $\varrho\varkappa = |\,\gamma$ setzen

$$AB = (O + \varrho)\varkappa = O\varkappa + \varrho\varkappa = O\varkappa + |\,\gamma.$$

„Ein Linienteil ist bezüglich eines beliebigen Punktes O des Raumes, den wir den Reduktionspunkt nennen, äquivalent einem Linienteile gleicher Strecke auf dem durch O gehenden Parallelstrahle und einer Momentenfläche, die das äufsere Produkt aus der Verbindungsstrecke des Reduktionspunktes mit dem Anfangselemente des gegebenen Linienteiles und der Strecke des letzteren ist."

Ist die Reduktion für einen Punkt O bekannt, dann läfst sich von da aus die Reduktion für jeden anderen Punkt, für die Punkte einer jeden Geraden ermitteln. Sei O_1 ein bestimmter, U ein beliebiger Punkt der Geraden, dann ist mit $O_1 - O = \lambda$, $U - O_1 = u\varepsilon$, die Strecke $U - O = (O_1 - O) + (U - O_1) = \lambda + u\varepsilon$, also

$$O = U - \lambda - u\varepsilon$$

und die Substitution dieses Wertes von O in die Gleichung für AB giebt

$$AB = (U + \varrho - \lambda - u\varepsilon)\varkappa = U\varkappa + \varrho\varkappa - (\lambda + u\varepsilon)\varkappa$$
$$= U\varkappa + |\,\gamma - |\,\gamma' = U\varkappa + |\,\gamma_u,$$

mit $(\lambda + u\varepsilon)\varkappa = |\,\gamma'$, $|\,(\gamma - \gamma') = \gamma_u$.

Ist ε, also auch die Gerade parallel $\varkappa$, parallel zu dem gegebenen Linienteile, so ist $\varepsilon\varkappa = 0$, daher in diesem Falle

$$AB = U\varkappa + \varrho\varkappa - \lambda\varkappa = U\varkappa + (\varrho - \lambda)\varkappa = U\varkappa + |\,\gamma_1,$$

mit $(\varrho - \lambda)\varkappa = |\,\gamma_1$.

Daraus erkennen wir, dafs im allgemeinen mit wechselndem Reduktionspunkte die Resultante $U\varkappa$ nur der Lage nach, das Reduktionsmoment hingegen nach Gröfse, Sinn und Stellung veränderlich ist, dafs für die Punkte eines Strahles μ parallel zu dem gegebenen Linienteile die Reduktion dieselbe, konstant ist.

4) Eine Schaar zusammengehörender Linienteile des Raumes bildet einen räumlichen Verein, ein räumliches System von Linienteilen.

Sind A_1B_1, $A_2B_2, \ldots A_kB_k, \ldots A_nB_n$ die Linienteile des Systemes Σ, so ist ihre Summe mit Rücksicht auf den Inhalt der vorhergehenden Nummer bezüglich irgend eines Punktes O, wenn wir dieselbe mit Σ bezeichnen,

$$\Sigma \equiv \sum_{k=1}^{k=n} A_kB_k = O\sum_{k=1}^{k=n}\varkappa_k + \sum_{k=1}^{k=n}\varrho_k\varkappa_k = O\sum_{k=1}^{k=n}\varkappa_k + |\sum_{k=1}^{k=n}\gamma_k,$$

und wenn wir

$$\sum_{k=1}^{k=n}\varkappa_k = \varkappa, \quad \sum_{k=1}^{k=n}\varrho_k\varkappa_k = \varrho\varkappa, \quad \sum_{k=1}^{k=n}\gamma_k = \gamma$$

setzen, so ergiebt sich

$$\Sigma \equiv O\varkappa + \varrho\varkappa = O\varkappa + |\,\gamma.$$

„Die Summe der Linienteile eines Vereins von Linienteilen für irgend einen Punkt O des Raumes ist äquivalent einem Linienteile und einer Momentenfläche. Die Strecke des resultierenden Linienteiles ist gleich der Summe der Strecken der Komponenten, er hat auf dem durch den Reduktionspunkt gehenden, zur Streckensumme parallelen Strahle eine beliebige Lage. Die resultierende Momentenfläche ist gleich der Summe der Momentenflächen der Komponenten bezüglich des Reduktionspunktes, resp. einem Paare, dessen Summe der resultierenden Momentenfläche gleich ist. Für alle Punkte des Strahles μ durch O parallel zur Reduktionsresultanten ist die Reduktion dieselbe."

Ist die Reduktion $\Sigma \equiv (O\varkappa, |\,\gamma)$ für irgend einen Strahl μ bekannt, so kann sofort auch die Reduktion für jeden zu μ parallelen Strahl μ_1 angegeben werden. Geht dieser Strahl μ_1 durch den Punkt O_1, ist $O_1 - O = \lambda$, so erhalten wir nach der dritten Nummer

$$\Sigma \equiv O_1\varkappa + \varrho\varkappa - \lambda\varkappa = O_1\varkappa + (\varrho - \lambda)\varkappa$$

$$\Sigma \equiv O_1\varkappa + |\,\gamma - |\,\gamma' = O_1\varkappa + |\,\gamma_1.$$

„Für alle Strahlen μ ist die Reduktionsresultante nach Gröfse, Richtung und Sinn dieselbe, hingegen ändert sich das Reduktionspaar im allgemeinen von Strahl zu Strahl.“

Das Moment des Reduktionspaares für den Strahl μ_1 ist

$$|\gamma_1 = |\gamma - \lambda\varkappa.$$

Multiplizieren wir die beiden Seiten dieser Gleichung mit $\varkappa$, dann folgt

$$\varkappa\,|\,\gamma_1 = \varkappa\,|\,\gamma, \quad kg_1 \cos(\varkappa, g_1) = kg \cos(\varkappa, \gamma),$$
$$g_1 \cos(\varkappa, \gamma_1) = g \cos(\varkappa, \gamma).$$

„Die Projektionen der Axenmomente der verschiedenen Reduktionen auf die Richtung der Strahlen μ sind einander gleich.“

Wir fanden, dafs

$$|\gamma_1 = |\gamma - \lambda\varkappa, \quad \gamma_1 = \gamma - |(\lambda\varkappa)$$

ist. Hiernach ändert sich das resultierende Moment im allgemeinen mit λ. Unter den Strahlen μ wird es mithin möglicher Weise einen solchen geben, für den die resultierende Momentenfläche senkrecht, das entsprechende Axenmoment parallel zu ihm ist.

Für einen solchen Strahl μ_0 mufs, wenn γ_0 das ihm entsprechende Axenmoment bedeutet, O_0 ein beliebiger Punkt von ihm ist und $(O_0 - O) = \lambda_0$ gesetzt wird, zunächst sein

$$|\gamma_0 = |\gamma - \lambda_0\varkappa.$$

Nun mufs das Feld $|\gamma_0$ zu $\varkappa$ senkrecht sein, mithin mufs

$$|\gamma_0\,|\,\varkappa = |(\gamma_0\varkappa) = 0$$

sein, so dafs die Bedingung lautet, wenn wir die vorletzte Gleichung mit $|\varkappa$ multiplizieren,

$$|(\gamma\varkappa) - (\lambda_0\varkappa)\,|\,\varkappa = 0, \quad \text{oder} \quad |(\gamma\varkappa) + (\varkappa\lambda_0)\,|\,\varkappa = 0.$$

Aber es ist $(\varkappa\lambda_0)\,|\,\varkappa = \varkappa^2\lambda_0 - (\varkappa\,|\,\lambda_0)\varkappa$, und wenn wir λ_0 senkrecht zu $\varkappa$ nehmen, so ist $(\varkappa\lambda_0)\,|\,\varkappa = \varkappa^2\lambda_0$, womit wir erhalten

$$\varkappa^2\lambda_0 = |(\varkappa\gamma), \quad \lambda_0 = \frac{|(\varkappa\gamma)}{\varkappa^2}.$$

Ist nun ϱ_0 der Fahrstrahl nach einem beliebigen Punkte des Strahles μ_0, der Zentralaxe des Systemes, mit O als Koordinatenursprung, so ist ihre Gleichung

$$\varrho_0 = \frac{|(\varkappa\gamma)}{\varkappa^2} + v\varkappa,$$

welche, mit $\varkappa$ multipliziert, übergeht in

$$\left(\varrho_0 - \frac{|(\varkappa\gamma)}{\varkappa^2}\right)\varkappa = 0.$$

Damit ist die Zentralaxe des Linienteilsystemes vollständig bestimmt.

5) Sind die Linienteile eines Systemes einander parallel, dann sind die Strecken aller Linienteile Vielfache einer zu ihnen parallelen Strecke ε, es ist $A_k B_k = A_k(B_k - A_k) = A_k m_k \varepsilon$. — Für einen beliebigen Punkt O des Raumes ist mithin

$$\Sigma \equiv O \sum_{k=1}^{k=n} m_k \varepsilon + \sum_{k=1}^{k=n} \varrho_k m_k \varepsilon = \sum_{k=1}^{k=n} m_k O \varepsilon + \sum_{k=1}^{k=n} m_k \varrho_k \varepsilon,$$

$$\Sigma \equiv m O \varepsilon + |\gamma.$$

Die Reduktionsresultante ist parallel zu der Richtung der Linienteile, die Axenmomente der Posten und das resultierende Axenmoment liegen in zu dieser Richtung senkrechten Ebenen.

Die allgemeine Streckengleichung der Zentralaxe kann geschrieben werden

$$k^2 \varrho_0 = -|\gamma| \varkappa + v \varkappa,$$

es ist jetzt $k^2 = m^2$, $-|\gamma = \varepsilon \sum_{k=1}^{k=n} m_k \varrho_k$, mithin im vorliegenden Falle

$$m^2 \varrho_0 = m \varepsilon \sum_{k=1}^{k=n} m_k \varrho_k | \varepsilon + v \varepsilon.$$

Setzen wir für den Augenblick

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k \varrho_k = \varrho',$$

dann ist

$$m \varepsilon \sum_{k=1}^{k=n} m_k \varrho_k | \varepsilon = m(\varepsilon \varrho') | \varepsilon = m[\varrho' - (\varepsilon | \varrho') \varepsilon],$$

so daſs sich ergiebt

$$\varrho_0 = \frac{\varrho'}{m} - \frac{\varepsilon | \varrho'}{m} \varepsilon + u \varepsilon,$$

oder

$$\varrho_0 = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} m_k \varrho_k}{\sum_{k=1}^{k=n} m_k} - \frac{\varepsilon | \sum_{k=1}^{k=n} m_k \varrho_k}{\sum_{k=1}^{k=n} m_k} \varepsilon + u \varepsilon$$

als Streckengleichung der Zentralaxe.

Geht ε in ε' über, während die Anfangspunkte und Gröſsen der

gegebenen Linienteile dieselben bleiben, so ist die Gleichung der Zentralaxe

$$\varrho_0 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{k=n} m_k \varrho_k}{\sum\limits_{k=1}^{k=n} m_k} - \frac{\varepsilon' \mid \sum\limits_{k=1}^{k=n} m_k \varrho_k}{\sum\limits_{k=1}^{k=n} m_k} \varepsilon' + u\varepsilon'.$$

Die Gleichungen der beiden Zentralaxen weisen einen gemeinsamen Ausdruck auf, weshalb sich diese Linien schneiden. Bezeichnet O_0 ihren Schnittpunkt, ϱ_0' dessen Fahrstrahl aus O, so ist

$$O_0 = O + \varrho_0' = O + \frac{\sum\limits_{k=1}^{k=n} m_k \varrho_k}{\sum\limits_{k=1}^{k=n} m_k} = O + \text{eine konstante Strecke.}$$

Der Punkt O_0 heifst deshalb Mittelpunkt des Parallellinienteilsystems.

6) Jeder Linienteil AB läfst sich aus vier in keiner Zahlbeziehung stehenden Punkten des Raumes numerisch ableiten. Sei

$$A = \sum_{k=1}^{k=4} a_k E_k, \quad B = \sum_{k=1}^{k=4} b_k E_k,$$

dann ist, der früheren Bezeichnung analog,

$$AB = m_{1,2} E_1 E_2 + m_{1,3} E_1 E_3 + \cdots + m_{3,4} E_3 E_4.$$

Nun dürfen wir setzen

$$AB = E_1(m_{1,2} E_2 + m_{1,3} E_3 + m_{1,4} E_4)$$
$$+ (m_{2,3} E_2 E_3 + m_{2,4} E_2 E_4 + m_{3,4} E_3 E_4),$$

wodurch der Linienteil AB als die Summe aus zwei Linienteilen erscheint, von denen der erste in dem Punkte E_1 entspringt und dessen Träger die E_1 gegenüberliegende Ebene des Grundtetraeders in dem Punkte F schneidet, für den die Relation besteht

$$(m_{1,2} + m_{1,3} + m_{1,4}) F = m_{1,2} E_2 + m_{1,3} E_3 + m_{1,4} E_4,$$

der zweite in der eben genannten Ebene liegt. Die Träger dieser beiden Linienteile schneiden sich in dem Punkte F, denn es ist, wie leicht gefunden werden kann, das äufsere Produkt aus diesen Linienteilen gleich Null.

Sind nun $A_1 B_1$, $A_2 B_2, \ldots A_k B_k, \ldots A_n B_n$ n Linienteile des Raumes, so ist mit

$$A_k B_k = E_1(a_k E_2 + b_k E_3 + c_k E_4) + (d_k E_2 E_3 + e_k E_2 E_4 + f_k E_3 E_4)$$

ihre Summe

$$\Sigma \equiv \sum_{k=1}^{k=n} A_k B_k = E_1 \sum_{k=1}^{k=n} (a_k E_2 + b_k E_3 + c_k E_4)$$
$$+ \sum_{k=1}^{k=n} (d_k E_2 E_3 + e_k E_2 E_4 + f_k E_3 E_4).$$

Die Summe besteht hiernach aus zwei Linienteilen, von denen der Träger des einen durch einen bestimmten Punkt geht, der andere in einer diesen Punkt nicht enthaltenden Ebene liegt, so dafs diese Linienteile im allgemeinen sich kreuzen. Weil die Punkte E_1, E_2, E_3 und E_4 willkürlich gewählt werden können, ziehen wir aus dieser Betrachtung den Satz:

„Ein System von Linienteilen im Raume ist auf unendlich viele Arten zwei sich kreuzenden Linienteilen äquivalent, von denen der Träger des einen durch einen beliebig angenommenen Punkt geht, der andere in einer diesen Punkt nicht enthaltenden, willkürlich angenommenen Ebene liegt."

Ist Σ äquivalent einem Linienteile

$$\Sigma = \sum_{k=1}^{k=n} A_k B_k = AB,$$

dann ist

$$\Sigma\Sigma = (AB)(AB) = 0.$$

Ist Σ äquivalent der Summe zweier Linienteile

$$\Sigma = \sum_{k=1}^{k=n} A_k B_k = AB + CD,$$

dann ist

$$\Sigma\Sigma = (AB + CD)(AB + CD) = 2(ABCD).$$

Der letzte Ausdruck verschwindet nur dann, wenn die Punkte A, B, C und D in einer Ebene liegen und dann ist $AB + CD$ gleich einem Linienteile in dieser Ebene.

Die Bedingung dafür, dafs eine Summe von Linienteilen einem Linienteile äquivalent sei, ist mithin

$$\Sigma\Sigma = 0.$$

„Eine Summe von Linienteilen ist dann und nur dann einem Linienteile äquivalent, wenn das äufsere Produkt aus ihr und ihr selbst verschwindet."

§ 57. Die Elemente der Determinantentheorie.

1) Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ die ursprünglichen Einheiten eines Systemes n^{ter} Stufe, $n = 1, 2, 3, 4$, aus ihnen die Gröfsen ersten Grades $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ mittelst der Zahlen $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{21}, a_{22}, \ldots$ so abgeleitet, wie es das nachfolgende Gleichungensystem aussagt:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{12}\varepsilon_2 + \cdots + a_{1n}\varepsilon_n, \\ \alpha_2 = a_{21}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{2n}\varepsilon_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_n = a_{n1}\varepsilon_1 + a_{n2}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n, \end{array}\right\} \tag{1}$$

dann unterliegt die Bildung des äufseren Produktes aus $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ dem Gesetze

$$a_{rs}\varepsilon_s a_{tu}\varepsilon_u = - a_{tu}\varepsilon_u a_{rs}\varepsilon_s,$$

weil

$$\varepsilon_s\varepsilon_u = - \varepsilon_u\varepsilon_s$$

ist.

Jedes Glied dieses Produktes besteht aus einem Produkte von n Zahlgröfsen und einem äufseren Produkte der n ursprünglichen Einheiten, in letzteren treten bei den einzelnen Gliedern die Faktoren in verschiedener Reihenfolge auf, aber auf Grund des eben angeführten Gesetzes läfst sich jedes solche Produkt auf die Form $\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ bringen, sein Vorzeichen resultiert aus der ursprünglichen Stellung der relativen Einheiten, welche wir so lange mit Rücksicht auf $\varepsilon_r\varepsilon_s = - \varepsilon_s\varepsilon_r$ zu versetzen haben, bis es erscheint. Dadurch haftet jedem Gliede des Produktes $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ der Faktor $\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ an, welchen wir als einen gemeinsamen Faktor ausheben können, so dafs, wenn sodann Δ den Wert des zweiten Faktors bezeichnet, welcher aus einer algebraischen Summe von Zahlprodukten mit n Faktoren besteht, die Gleichung erscheint

$$\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n = \Delta(\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n).$$

Den Zahlkoeffizienten Δ des Produktes auf der rechten Seite dieser Gleichung nennen wir Determinante.

„Eine Determinante ist der Zahlkoeffizient eines äufseren Produktes aus n linearen Faktoren, von denen jeder aus denselben n ursprünglichen Einheiten abgeleitet ist."

Nehmen wir das äufsere Produkt aus den sämtlichen relativen Einheiten im Gebiete n^{ter} Stufe

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n = 1,$$

dann ist

$$\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n = \Delta.$$

„Eine Determinante ist ein äufseres Produkt aus n Gröfsen ersten Grades im Gebiete n^{ter} Stufe, wenn das äufsere Produkt aus den n relativen Einheiten des Systemes gleich der absoluten Einheit genommen wird."

Durch diese Definition sind wir in der Lage die Eigenschaften des Produktes $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ unmittelbar auf die Determinante desselben übertragen zu können.

Das Vorzeichen eines jeden Gliedes der Determinante ist abhängig von der ursprünglichen Stellung der Faktoren der ihm anhaftenden Einheit n^{ter} Stufe. Weil $\varepsilon_r \varepsilon_s = - \varepsilon_s \varepsilon_r$ ist, so ändert jedes äufsere Produkt sein Zeichen, wenn wir irgend zwei benachbarte Faktoren ersten Grades miteinander vertauschen, d. h. irgend einen Faktor über den benachbarten hinwegsetzen, so dafs es gleiches oder entgegengesetztes Zeichen zu erhalten hat, je nachdem ein Faktor ersten Grades eine gerade oder ungerade Anzahl von Faktoren überspringt, es ist

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p \varepsilon_q \cdots \varepsilon_n = (-1)^p \varepsilon_q \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p \cdots \varepsilon_n,$$

wenn wir uns beliebig viele ursprüngliche Einheiten denken, das System als polydimensional ansehen.

Wir nennen das Überspringen eines Faktors durch einen benachbarten eine Transposition. Diese Transpositionen sind nötig, um in dem entwickelten Ausdrucke der Determinante jedes Einheitsprodukt n^{ter} Stufe auf die Form $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ zu bringen.

„In dem entwickelten Ausdrucke einer Determinante ist irgend ein Glied positiv oder negativ, je nachdem das ihm anhaftende Einheitsprodukt n^{ter} Stufe durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Transpositionen in die Form $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ überzuführen ist."

Wollen wir eine Determinante durch ihre Elemente ausdrücken, dann schreiben wir

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Jede Reihe von Faktoren, welche zu demselben Faktor α_k gehört, ist eine Horizontalreihe, eine Zeile, jede Reihe, die zu derselben Einheit ε_k gehört, ist eine Vertikalreihe, eine Kolumne der Determinante.

Stellen wir neben das Produkt $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$, dessen Faktoren durch die Gleichungen (1) gegeben sind, ein zweites Produkt $\alpha' \alpha'' \ldots \alpha^{(n)}$, dessen Faktoren sind

$$\left.\begin{array}{l} \alpha' \;\, = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + a_{31}\varepsilon_3 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n, \\ \alpha'' \; = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + a_{32}\varepsilon_3 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \alpha^{(n)} = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + a_{3n}\varepsilon_3 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n, \end{array}\right\} \qquad (4)$$

so dafs die Determinante dieses Produktes ist

$$\varDelta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \ldots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \ldots a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (5)$$

wo also die Horizontalreihen von $\varDelta'$ mit den Vertikalreihen von $\varDelta$ übereinstimmen. Entwickeln wir die Determinante $\varDelta'$, dann enthält jedes Glied derselben den Faktor $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$, wie $\varDelta$. Entwickeln wir die Determinante $\varDelta$, dann sind in den einzelnen Gliedern die hinteren Indizes der Reihe nach $1, 2 \ldots n$, während die vorderen dieselben Zahlen in allen Permutationen sind. Entwickeln wir $\varDelta'$, dann sind in den einzelnen Gliedern die vorderen Indizes die Zahlen $1, 2, \ldots n$ der Reihe nach, während die hinteren Indizes sich durch alle Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots n$ ergeben. Aber von der Stellung eines Zahlfaktors in einem Produkte ist das Vorzeichen dieses Produktes nicht abhängig. Ordnen wir daher in $\varDelta$ an jedem Gliede die Faktoren a_{rs} so, dafs die vorderen Indizes der Reihe nach die Zahlen $1, 2, \ldots n$ sind, wodurch die hinteren Indizes dieselben Zahlen in allen Permutationen werden, dann stimmen die Glieder von $\varDelta$ mit denjenigen von $\varDelta'$ vollkommen überein, woraus

$$\varDelta = \varDelta'$$

hervorgeht, oder

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \quad a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \ldots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \ldots a_{n2} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

„Eine Determinante ändert sich nicht, wenn wir ihre Zeilen als Kolumnen und gleichzeitig ihre Kolumnen als Zeilen setzen. — Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn wir alle vorderen Indizes ihrer Zahlen mit den hinteren Indizes vertauschen.“

Nennen wir die hier vorgenommene Vertauschung der Elemente,

der Zeilen und Kolumnen kurz „Umordnung der Determinante“, dann erhält unser Satz die einfache Fassung:

„Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn wir sie umordnen.“

Weil nun alle bezüglich der Horizontalreihen einer Determinante geltenden Sätze sofort auf ihre Vertikalreihen übertragen werden können, so nennen wir beide Gattungen von Reihen einfach „Reihen“.

2) Auf Grund der Eigenschaften des Produktes $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ lassen sich unmittelbar mehrere Eigenschaften der entsprechenden Determinante angeben.

Ein äufseres Produkt aus Faktoren ersten Grades ändert sein Zeichen, wenn einer seiner Faktoren eine ungerade Anzahl von Faktoren überspringt, wenn irgend zwei Faktoren miteinander vertauscht werden.

„Eine Determinante ändert ihr Zeichen, wenn eine ihrer Reihen über eine ungerade Anzahl von Reihen hinweggesetzt wird, wenn zwei beliebige Reihen miteinander vertauscht werden.“

Beispielsweise ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

Ein äufseres Produkt aus Faktoren ersten Grades, welches zwei gleiche Faktoren enthält, verschwindet.

„Sind in einer Determinante irgend zwei Reihen einander gleich, so verschwindet sie.“

Z. B. ist

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a & c & c \\ b & d & d \\ c & e & e \end{vmatrix} = 0.$$

Das Vorzeichen eines äufseren Produktes ist nur von der Stellung seiner extensiven Faktoren abhängig, nicht von dem Zahlfaktor, welcher mit einem extensiven Faktor verknüpft ist, es ist

$$\alpha_1\alpha_2 \ldots m\alpha_p \ldots \alpha_n = m(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p \ldots \alpha_n).$$

„Werden alle Glieder einer Reihe einer Determinante mit demselben Zahlfaktor vervielfacht, dann geht ihr Wert in das Vielfache dieses Faktors über. — Besitzen alle Glieder einer Reihe einen gemeinsamen Faktor, dann ist dieser ein Faktor der ganzen Determinante.“

Z. B. ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Es besteht die Gleichung, wenn β_2 und γ_2 ebenfalls Gröfsen ersten Grades bedeuten,

$$\alpha_1(\beta_2 + \gamma_2)\alpha_3\alpha_4 = \alpha_1\beta_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\gamma_2\alpha_3\alpha_4.$$

„Sind in einer Determinante die Elemente einer Reihe Summen von gleich vielen Posten, so ist sie äquivalent einer Summe von Determinanten, deren Anzahl gleich der Anzahl dieser Posten ist.“

Z. B. haben wir

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Wir haben die Relation

$$\alpha_1(\alpha_2 + m\alpha_1)\alpha_3 \ldots \alpha_n = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n.$$

„Eine Determinante bleibt ungeändert, wenn wir zu sämtlichen Elementen einer Reihe die mit demselben Zahlfaktor multiplizierten Elemente einer anderen Reihe addieren.“

Z. B. ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ma_{11} & a_{22} + ma_{12} & a_{23} + ma_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3) Wir wollen jetzt das Multiplikationstheorem der Determinanten in der einfachsten Weise ableiten, dabei $n = 3$ nehmen, die anzustellende Betrachtung ist dieselbe für $n = 4$, nur ist dann die Zahl der Glieder gröfser.

Wir setzen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + a_{31}\varepsilon_3, & \beta_1 &= b_{11}\varepsilon_1 + b_{21}\varepsilon_2 + b_{31}\varepsilon_3, \\ \alpha_2 &= a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + a_{32}\varepsilon_3, & \beta_2 &= b_{12}\varepsilon_1 + b_{22}\varepsilon_2 + b_{32}\varepsilon_3, \\ \alpha_3 &= a_{13}\varepsilon_1 + a_{23}\varepsilon_2 + a_{33}\varepsilon_3, & \beta_3 &= b_{13}\varepsilon_1 + b_{23}\varepsilon_2 + b_{33}\varepsilon_3, \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} \alpha' &= a_{11}\varepsilon_1 + a_{12}\varepsilon_2 + a_{13}\varepsilon_3, & \beta' &= b_{11}\varepsilon_1 + b_{12}\varepsilon_2 + b_{13}\varepsilon_3, \\ \alpha'' &= a_{21}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + a_{23}\varepsilon_3, & \beta'' &= b_{21}\varepsilon_1 + b_{22}\varepsilon_2 + b_{23}\varepsilon_3, \\ \alpha''' &= a_{31}\varepsilon_1 + a_{32}\varepsilon_2 + a_{33}\varepsilon_3, & \beta''' &= b_{31}\varepsilon_1 + b_{32}\varepsilon_2 + b_{33}\varepsilon_3. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Determinanten der a- und b-Gröfsen mit Δ_a und Δ_b, dann ist

$$\Delta_a = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \alpha' \alpha'' \alpha''', \quad \Delta_b = \beta_1 \beta_2 \beta_3 = \beta' \beta'' \beta'''.$$

Endlich setzen wir

$$\gamma_1 = a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + a_{13}\beta_3 = c_{11}\varepsilon_1 + c_{12}\varepsilon_2 + c_{13}\varepsilon_3,$$
$$\gamma_2 = a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + a_{23}\beta_3 = c_{21}\varepsilon_1 + c_{22}\varepsilon_2 + c_{23}\varepsilon_3,$$
$$\gamma_3 = a_{31}\beta_1 + a_{32}\beta_2 + a_{33}\beta_3 = c_{31}\varepsilon_1 + c_{32}\varepsilon_2 + c_{33}\varepsilon_3,$$

welche Gröfsen ebenfalls von den ursprünglichen Einheiten ε_1, ε_2 und ε_3 abhängig sind, da solches β_1, β_2 und β_3 sind.

Dann besteht die Gleichung

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \Delta_c = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \beta_1\beta_2\beta_3,$$

oder

$$\Delta_c = \Delta_a \Delta_b.$$

Diese Gleichung sagt aus, dafs das Produkt zweier dreigliedrigen Determinanten durch ein dreifaktoriges Produkt von Gröfsen ersten Grades dargestellt werden kann. Ein solches Produkt ist aber stets einer Determinante äquivalent. Um diese Determinante zu erhalten, haben wir den Wert dieses Produktes mittelst der Einheiten ε_1, ε_2 und ε_3 auszudrücken, was dadurch geschieht, dafs wir die Werte von β_1, β_2 und β_3 in die Ausdrücke für γ_1, γ_2 und γ_3 substituieren, was giebt:

$$\gamma_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13})\varepsilon_1 + (a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{23})\varepsilon_2$$
$$+ (a_{11}b_{31} + a_{12}b_{32} + a_{13}b_{33})\varepsilon_3,$$
$$\gamma_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} + a_{23}b_{13})\varepsilon_1 + (a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23})\varepsilon_2$$
$$+ (a_{21}b_{31} + a_{22}b_{32} + a_{23}b_{33})\varepsilon_3,$$
$$\gamma_3 = (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{12} + a_{33}b_{13})\varepsilon_1 + (a_{31}b_{21} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{23})\varepsilon_2$$
$$+ (a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} + a_{33}b_{33})\varepsilon_3.$$

Indem wir die zweifachen Werte von γ_1, γ_2 und γ_3 miteinander vergleichen, erkennen wir, dafs ist

$$c_{rs} = a_{r1}b_{s1} + a_{r2}b_{s2} + a_{r3}b_{s3}.$$

Diese Reihe von Gleichungen enthält in Verbindung mit $\Delta_a\Delta_b = \Delta_c$ die Lösung des Multiplikationstheoremes in der gewöhnlichen Form.

Wir erkennen, dafs ist

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13}$$
$$= (a_{11}\varepsilon_1 + a_{12}\varepsilon_2 + a_{13}\varepsilon_3)|(b_{11}\varepsilon_1 + b_{12}\varepsilon_2 + b_{13}\varepsilon_3) = \alpha_1|\beta_1,$$

und so fort, allgemein

$$c_{rs} = \alpha_r|\beta_s.$$

Demnach ist, unter den α- und β-Gröfsen Punkte oder Strecken verstanden,

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)(\beta_1\beta_2\beta_3) = \begin{vmatrix} \alpha_1|\beta_1 & \alpha_2|\beta_1 & \alpha_3|\beta_1 \\ \alpha_1|\beta_2 & \alpha_2|\beta_2 & \alpha_3|\beta_2 \\ \alpha_1|\beta_3 & \alpha_2|\beta_3 & \alpha_3|\beta_3 \end{vmatrix},$$

und wenn A_k, B_k Punkte sind im Elementarsystem vierter Stufe

$$(A_1A_2A_3A_4)(B_1B_2B_3B_4) = \begin{vmatrix} A_1|B_1 & A_2|B_1 & A_3|B_1 & A_4|B_1 \\ A_1|B_2 & A_2|B_2 & A_3|B_2 & A_4|B_2 \\ A_1|B_3 & A_2|B_3 & A_3|B_3 & A_4|B_3 \\ A_1|B_4 & A_2|B_4 & A_3|B_4 & A_4|B_4 \end{vmatrix}.$$

„Multiplizieren wir zwei Produkte aus je n Faktoren ersten Grades im Hauptgebiete n^{ter} Stufe miteinander, dann erhalten wir eine Determinante, deren einzelne Zeilen daraus hervorgehen, dafs wir die Faktoren des ersten Produktes der Reihe nach mit denjenigen des zweiten Produktes innerlich multiplizieren."

4) Es ist $(\alpha_1\alpha_2)|(\beta_1\beta_2)$ im Raume als System dritter Stufe ein Produkt nullter Stufe, eine Gröfse dritten Grades. Wenden wir den vorhin ausgesprochenen Satz an, so ergiebt sich

$$[(\alpha_1\alpha_2)|(\beta_1\beta_2)][(\beta_1\beta_2)|(\alpha_1\alpha_2)] = \begin{vmatrix} \alpha_1|\beta_1 & \alpha_2|\beta_1 & 0 \\ \alpha_1|\beta_2 & \alpha_2|\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & |(\beta_1\beta_2)(\alpha_1\alpha_2) \end{vmatrix}$$
$$= (\alpha_1\alpha_2)|(\beta_1\beta_2)\begin{vmatrix} \alpha_1|\beta_1 & \alpha_2|\beta_1 \\ \alpha_1|\beta_2 & \alpha_2|\beta_2 \end{vmatrix},$$

mithin existiert, weil $(\beta_1\beta_2)|(\alpha_1\alpha_2) = (\alpha_1\alpha_2)|(\beta_1\beta_2)$ ist, die Relation

$$(\alpha_1\alpha_2)|(\beta_1\beta_2) = \begin{vmatrix} \alpha_1|\beta_1 & \alpha_2|\beta_1 \\ \alpha_1|\beta_2 & \alpha_2|\beta_2 \end{vmatrix} = (\alpha_1|\beta_1)(\alpha_2|\beta_2) - (\alpha_2|\beta_1)(\alpha_1|\beta_2).$$

„Das innere Produkt zweier Felder (Linienteile) ist gleich der Determinante, deren Zeilen sich dadurch ergeben, dafs wir die

Faktoren des ersten Feldes (Linienteiles) nacheinander mit denen des zweiten innerlich multiplizieren."

Sind $(A_1 A_2 A_3)$ und $(B_1 B_2 B_3)$ zwei Flächenteile im Gebiete vierter Stufe, so ergiebt sich auf demselben Wege wie vorhin

$$(A_1 A_2 A_3)|(B_1 B_2 B_3) = \begin{vmatrix} A_1|B_1 & A_2|B_1 & A_3|B_1 \\ A_1|B_2 & A_2|B_2 & A_3|B_2 \\ A_1|B_3 & A_2|B_3 & A_3|B_3 \end{vmatrix}.$$

Eine ausführlichere Determinantentheorie hat V. Schlegel in seinen Elementen der modernen Geometrie und Algebra unter den Nummern 59 bis 76 entwickelt (Leipzig, B. G. Teubner 1875).

§ 58. Die äußere und die innere Multiplikation in den verschiedenen Gebieten.

Bisher haben uns drei Multiplikationsarten, welche für die Geometrie die wichtigsten sind, beschäftigt. — Die erste Multiplikationsart war die mit dem Drehfaktor i^n, sie kann eine zirkuläre Multiplikation genannt werden. — Die zweite Multiplikationsart besitzt die Eigenschaften, daß, wenn ε_r, ε_s zwei verschiedene ursprüngliche Einheiten des Systemes sind,

$$\varepsilon_r \varepsilon_s = -\varepsilon_s \varepsilon_r\,, \quad \varepsilon_r \varepsilon_r = \varepsilon_s \varepsilon_s = 0$$

ist, daß die für Produkte aus Einheiten beliebiger Stufe geltenden Beziehungen bestehen bleiben, wenn wir an Stelle der in ihnen vorkommenden relativen Einheiten Größen ersten Grades substituieren. Diese Multiplikationsart wurde mit dem Namen „äußere Multiplikation" belegt. — Die dritte Multiplikationsart trat in unsere Untersuchungen gewissermaaßen von selbst ein, sie hat die Eigenschaften, daß

$$\varepsilon_r \varepsilon_s = \varepsilon_s \varepsilon_r = 0\,, \quad \varepsilon_r \varepsilon_r = \varepsilon_s \varepsilon_s$$

ist, daß die für Produkte aus Einheiten beliebiger Stufe geltenden Relationen dieselben bleiben, wenn wir an Stelle der in ihnen vorkommenden relativen Einheiten Größen ersten Grades substituieren. Diese Multiplikationsart wurde mit dem Namen „innere Multiplikation" bezeichnet. — Die äußere und die innere Multiplikation lassen sich stets in einander überführen, was Folge des Ergänzungsbegriffes ist. Deshalb erscheint bei dem eingeschlagenen Entwickelungsgange die innere Multiplikation nicht in der Weise hervorragend, wie die äußere Multiplikation.

Zwischen der äufseren und inneren Multiplikation steht nun noch eine vierte Multiplikationsart, die mittlere Multiplikation, welcher das nächste Kapitel gewidmet wurde.

Diese Multiplikationsarten sind nicht die einzig möglichen, sie sind nur die für die Geometrie erspriefslichsten. Grafsmann hat gezeigt, dafs es unendlich viele Multiplikationsarten giebt, die infolge besonderer Bedingungen in Gattungen zerfallen. (Journal von Crelle, Bd. 49, S. 123 ff.)

Fünftes Kapitel.

Die mittlere Multiplikation.

(Quaternionentheorie.)

---

§ 1. Ableitung der Bedingungsgleichungen der mittleren Multiplikation.

Die äufsere Multiplikation im Systeme n^{ter} Stufe ($n = 1, 2, 3, 4$) ist, wenn ε_r, ε_s zwei verschiedene ursprüngliche Einheiten sind, an die Bedingungen gebunden

$$\varepsilon_r\varepsilon_s + \varepsilon_s\varepsilon_r = 0, \quad \varepsilon_1^{\,2} = \varepsilon_2^{\,2} = \cdots = \varepsilon_n^{\,2}, \quad \varepsilon_1^{\,2} + \varepsilon_2^{\,2} + \cdots + \varepsilon_n^{\,2} = 0,$$

die innere Multiplikation unterliegt den Bedingungen

$$\varepsilon_r\varepsilon_s = \varepsilon_s\varepsilon_r, \quad \varepsilon_1^{\,2} = \varepsilon_2^{\,2} = \cdots = \varepsilon_n^{\,2},$$

Diese Bedingungsgleichungen gehen aus den drei Gruppen hervor

1) $\varepsilon_r\varepsilon_s = \varepsilon_s\varepsilon_r$,

2) $\varepsilon_r\varepsilon_s + \varepsilon_s\varepsilon_r = 0, \quad \varepsilon_1^{\,2} = \varepsilon_2^{\,2} = \cdots = \varepsilon_n^{\,2}$,

3) $\varepsilon_1^{\,2} + \varepsilon_2^{\,2} + \cdots + \varepsilon_n^{\,2} = 0$.

Untersuchen wir jetzt die Multiplikation, für welche die Bedingungen

$$\varepsilon_r\varepsilon_s + \varepsilon_s\varepsilon_r = 0, \quad \varepsilon_1^{\,2} = \varepsilon_2^{\,2} = \cdots = \varepsilon_n^{\,2},$$

die Gleichungen der mittleren Gruppe bestehen.

Weil zunächst nur die mittlere Multiplikation für den Raum als System dritter Stufe praktische Bedeutung hat, so befassen wir uns hier mit derselben nur in dem Falle, in welchem die ursprünglichen Einheiten Strecken sind,

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1$$

ist und diese Einheiten ein Normalsystem bilden.

Die sämtlichen Bedingungsgleichungen für die mittlere Multiplikation im Raume als System dritter Stufe sind

$$(\varepsilon_2\varepsilon_3) = -(\varepsilon_3\varepsilon_2), \quad (\varepsilon_3\varepsilon_1) = -(\varepsilon_1\varepsilon_3), \quad (\varepsilon_1\varepsilon_2) = -(\varepsilon_2\varepsilon_1), \qquad (1)$$

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_3^2. \qquad (2)$$

Die Gleichungen (1) gelten für die äufsere, die Gleichungen (2) für die innere Multiplikation, wodurch die mittlere Multiplikation eine gewisse Verknüpfung der äufseren und inneren Multiplikation ist.

Auch für die mittlere Multiplikation ist die Anzahl der voneinander unabhängigen Einheitsprodukte gleich drei, wie für die äufsere Multiplikation, gleich der Anzahl der ursprünglichen Einheiten, wodurch die Einheiten des Produktes, wenn wir noch die in (2) zugrunde liegende Zahleinheit hinzunehmen, dieselben wie die ursprünglichen bleiben. Diese Einfachheit verschwindet bei Gebieten höherer Stufe.

Nun ist für die mittlere Multiplikation, welche wir dadurch karakterisieren, dafs wir zwischen je zwei Faktoren einen Punkt setzen,

$$(\varepsilon_r \cdot \varepsilon_s) = -(\varepsilon_s \cdot \varepsilon_r), \quad (\varepsilon_r \cdot \varepsilon_r) = (\varepsilon_s \cdot \varepsilon_s),$$

ferner ist

$$(\varepsilon_r|\varepsilon_s) = 0, \quad (\varepsilon_r|\varepsilon_r) = 1,$$

$$(\varepsilon_r\varepsilon_s) = |\varepsilon_t, \quad (\varepsilon_r\varepsilon_r) = 0,$$

$$|(\varepsilon_r\varepsilon_s) = \varepsilon_t, \quad (\varepsilon_r\varepsilon_s) = -(\varepsilon_s\varepsilon_r),$$

wenn r, s, t dem Zyklus 1, 2, 3 angehören, d. h. r, s, t entweder 1, 2, 3 oder 2, 3, 1 oder 3, 1, 2 sind.

Die Bedingungen

$$(\varepsilon_r \cdot \varepsilon_r) = (\varepsilon_s \cdot \varepsilon_s), \quad (\varepsilon_r|\varepsilon_r) = 1, \quad (\varepsilon_r\varepsilon_r) = 0$$

sagen aus, dafs das mittlere Produkt aus zwei gleichen Einheiten eine Zahl sein mufs, die näher zu bestimmen ist, weshalb wir setzen

$$(\varepsilon_r \cdot \varepsilon_r) = (\varepsilon_s \cdot \varepsilon_s) = m.$$

Sodann erkennen wir aus den Bedingungen

$$(\varepsilon_r|\varepsilon_s) = 0, \quad |(\varepsilon_r\varepsilon_s) = \varepsilon_t,$$

oder

$$(\varepsilon_r|\varepsilon_s) = 0, \quad (|\varepsilon_r|\varepsilon_s) = \varepsilon_t,$$

dafs das mittlere Produkt aus zwei ungleichartigen Einheiten eine Strecke sein mufs, dafs wir haben müssen

$$(\varepsilon_r \cdot \varepsilon_s) = n\varepsilon_t,$$

wo n eine ebenfalls näher zu bestimmende Zahl bedeutet.

Für die mittlere Multiplikation bestehen demnach die beiden Relationen

$$(\varepsilon_r \cdot \varepsilon_r) = m, \quad (\varepsilon_r \cdot \varepsilon_s) = -(\varepsilon_s \cdot \varepsilon_r) = n\varepsilon_t.$$

Für die äufsere Multiplikation gilt das Gesetz der Vereinbarkeit der Faktoren, welches auch für die mittlere Multiplikation zu bestehen hat, so dafs

$$\varepsilon_r \cdot \varepsilon_s \cdot \varepsilon_t = \varepsilon_r \cdot (\varepsilon_s \cdot \varepsilon_t) = (\varepsilon_r \cdot \varepsilon_s) \cdot \varepsilon_t$$

sein mufs.

Dadurch ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r \cdot \varepsilon_s \cdot \varepsilon_t &= (\varepsilon_r \cdot \varepsilon_s) \cdot \varepsilon_t = n\varepsilon_t \cdot \varepsilon_t = n(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_t) = nm = n\varepsilon_r \cdot \varepsilon_r = \varepsilon_r \cdot n\varepsilon_r \\
&= \varepsilon_r \cdot (\varepsilon_s \cdot \varepsilon_t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t \cdot \varepsilon_s \cdot \varepsilon_r = (\varepsilon_t \cdot \varepsilon_s) \cdot \varepsilon_r &= -(\varepsilon_s \cdot \varepsilon_t) \cdot \varepsilon_r = -n\varepsilon_r \cdot \varepsilon_r \\
&= -n(\varepsilon_r \cdot \varepsilon_r) = -nm \\
&= -n(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_t) = -\varepsilon_t \cdot n\varepsilon_t = \varepsilon_t \cdot (-n\varepsilon_t) \\
&= \varepsilon_t \cdot [-(\varepsilon_r \cdot \varepsilon_s)] \\
&= \varepsilon_t \cdot (\varepsilon_s \cdot \varepsilon_r).
\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\varepsilon_r \cdot \varepsilon_r \cdot \varepsilon_r = (\varepsilon_r \cdot \varepsilon_r) \cdot \varepsilon_r = m\varepsilon_r = \varepsilon_r \cdot m = \varepsilon_r \cdot (\varepsilon_r \cdot \varepsilon_r),$$

$$\varepsilon_r \cdot \varepsilon_s \cdot \varepsilon_r = \varepsilon_r \cdot (\varepsilon_s \cdot \varepsilon_r) = -\varepsilon_r \cdot n\varepsilon_t = n\varepsilon_t \cdot \varepsilon_r = (\varepsilon_r \cdot \varepsilon_s) \cdot \varepsilon_r,$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r \cdot \varepsilon_r \cdot \varepsilon_s = (\varepsilon_r \cdot \varepsilon_r) \cdot \varepsilon_s &= m\varepsilon_s = \varepsilon_s \cdot m = \varepsilon_s \cdot \varepsilon_r \cdot \varepsilon_r = (\varepsilon_s \cdot \varepsilon_r) \cdot \varepsilon_r \\
&= -(\varepsilon_r \cdot \varepsilon_s) \cdot \varepsilon_r = -n\varepsilon_t \cdot \varepsilon_r = -n^2 \varepsilon_s = -n \cdot n\varepsilon_s \\
&= -n\varepsilon_t \cdot \varepsilon_r = \varepsilon_r \cdot n\varepsilon_t \\
&= \varepsilon_r \cdot (\varepsilon_r \cdot \varepsilon_s).
\end{aligned}$$

Aus den letzten Relationen erkennen wir, dafs bei allgemeiner Gültigkeit des assoziativen Gesetzes

$$m\varepsilon_s = -n^2\varepsilon_s,$$

d. h.

$$n = \pm\sqrt{-m}$$

sein mufs, welches die einzige Bedingung für die Abhängigkeit der Koeffizienten m und n voneinander ist. Daraus geht hervor, dafs diese Koeffizienten reelle Zahlen in der Weise sein müssen, dafs der erste nur das negative Quadrat des zweiten zu sein hat, weshalb es unendlich viele mittlere Multiplikationen giebt.

Der Einfachheit halber setzen wir fest

$$m = -1,$$

alsdann ist

$$n = \pm 1,$$

und weil die Wahl des Vorzeichens von n uns überlassen ist, so nehmen wir für die mittlere Multiplikation

$$m = -1, \quad n = +1.$$

Hiermit erhalten wir für die mittleren Produkte aus den relativen Einheiten des Systemes

$$(\varepsilon_r \cdot \varepsilon_s) = \varepsilon_t, \qquad (\varepsilon_r \cdot \varepsilon_r) = -1,$$
$$(\varepsilon_r \cdot \varepsilon_s) = |(\varepsilon_r \varepsilon_s) = \varepsilon_t, \qquad (\varepsilon_r \cdot \varepsilon_r) = -\varepsilon_r^2 = -1,$$
$$(\varepsilon_s \cdot \varepsilon_r) = |(\varepsilon_s \varepsilon_r) = -\varepsilon_t, \qquad (\varepsilon_s \cdot \varepsilon_r) + (\varepsilon_r \cdot \varepsilon_s) = 0,$$
$$(\varepsilon_r \cdot \varepsilon_s \cdot \varepsilon_t) = \varepsilon_t \cdot \varepsilon_t = -\varepsilon_t^2 = -1.$$

§ 2. Das mittlere Produkt aus zwei beliebigen Strecken.

Setzen wir

$$\alpha = \sum_{k=1}^{k=3} a_k \varepsilon_k, \quad \beta = \sum_{k=1}^{k=3} b_k \varepsilon_k,$$

dann ist

$$\alpha \cdot \beta = (a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_3) \cdot (b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + b_3 \varepsilon_3)$$
$$= a_1 b_1 (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1) + a_2 b_1 (\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_1) + a_3 b_1 (\varepsilon_3 \cdot \varepsilon_1) + a_1 b_2 (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2) + a_2 b_2 (\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_2)$$
$$+ a_3 b_2 (\varepsilon_3 \cdot \varepsilon_2) + a_1 b_3 (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3) + a_2 b_3 (\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3) + a_3 b_3 (\varepsilon_3 \cdot \varepsilon_3),$$
$$\alpha \cdot \beta = -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + \{(a_2 b_3 - a_3 b_2)\varepsilon_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\varepsilon_2$$
$$+ (a_1 b_2 - a_2 b_1)\varepsilon_3\},$$

aber es ist

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = (\alpha|\beta),$$
$$(a_2 b_3 - a_3 b_2)\varepsilon_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\varepsilon_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\varepsilon_3 = |(\alpha\beta),$$

mithin ergiebt sich

$$\alpha \cdot \beta = -\alpha|\beta + |(\alpha\beta).$$

Das mittlere Produkt aus zwei Strecken ist gleich der Summe aus dem negativen Werte ihres inneren und der Ergänzung ihres äufseren Produktes.

Ist $\mathfrak{w}$ der Winkel, welchen die Strecken α und β miteinander einschliefsen, ε die Stellungsstrecke der durch α und β bestimmten Ebene, dann ist

$$\alpha|\beta = ab \cos \mathfrak{w}, \qquad |(\alpha\beta) = ab \sin \mathfrak{w}\,\varepsilon,$$

folglich ist auch

$$\alpha \cdot \beta = ab(-\cos \mathfrak{w} + \sin \mathfrak{w}\,\varepsilon).$$

Mit

$$-(\alpha|\beta)=c, \quad |(\alpha\beta)=\delta=d\varepsilon=d_1\varepsilon_1+d_2\varepsilon_2+d_3\varepsilon_3$$

ergiebt sich ferner

$$\alpha\cdot\beta=c+\delta=c+d\varepsilon,$$
$$\alpha\cdot\beta=c+d_1\varepsilon_1+d_2\varepsilon_2+d_3\varepsilon_3.$$

Das mittlere Produkt aus zwei Strecken ist gleich der Summe aus einer reellen Zahl und einer Strecke, die letztere steht auf der durch die beiden Faktoren bestimmten Ebene senkrecht, ihre Länge ist gleich der Flächenzahl des durch die Faktoren gegebenen Spatheckes, und der Richtungssinn der Strecke ist ein solcher, dafs der Spath aus den Faktoren des Produktes und der Strecke positiv erscheint. Das mittlere Produkt aus zwei Strecken ist gleich einer Zahl und einer Vielfachensumme der relativen Einheiten des Systemes.

Das Produkt aus den Längenzahlen der Streckenfaktoren heifst die Länge des mittleren Produktes, mit l bezeichnet ist sie

$$l=ab=\sqrt{\alpha^2\beta^2}=\sqrt{(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2)}.$$

Weil

$$ab\cos\mathfrak{w}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$
$$ab\sin\mathfrak{w}\,\varepsilon=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\varepsilon_3+\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}\varepsilon_1+\begin{vmatrix}a_3&b_3\\a_1&b_1\end{vmatrix}\varepsilon_2$$

ist, so haben wir

$$\cos\mathfrak{w}=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3):ab$$
$$\sin\mathfrak{w}=\left\{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_3&b_3\\a_1&b_1\end{vmatrix}^2\right\}^{\frac{1}{2}}:ab.$$

Ferner ist

$$c=-ab\cos\mathfrak{w}, \quad \delta=ab\sin\mathfrak{w}\,\varepsilon,$$

womit sich ergiebt

$$c^2+\delta^2=c^2+d^2=a^2b^2,$$

mithin ist auch

$$l=\sqrt{c^2+\delta^2}=\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{c^2+d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2}.$$

Für die Stellungsstrecke ε der durch die Faktoren α und β bestimmten Ebene ergiebt sich

$$\varepsilon=\frac{|(\alpha\beta)}{\sqrt{(\alpha\beta)^2}}.$$

Stehen α und β wechselseitig aufeinander senkrecht, dann ist $\alpha|\beta=0$, daher in diesem Falle

$$\alpha\cdot\beta=|(\alpha\beta)=ab\varepsilon=l\varepsilon,$$

[illegible] α und β, oder sind sie parallel, so ist $|(\alpha\beta)=0$, [illegible] alsdann

$$\alpha \cdot \beta = -(\alpha|\beta) = -ab = -l.$$

Für das mittlere Produkt aus den Strecken β und α ergiebt sich

$$\begin{aligned}\beta \cdot \alpha &= -(\beta|\alpha) + |(\beta\alpha) = -(\alpha|\beta) - |(\alpha\beta)\\ &= -ab(\cos \mathfrak{w} + \sin \mathfrak{w}\varepsilon).\end{aligned}$$

Mit $\beta = \alpha$ erhalten wir

$$\alpha \cdot \alpha = \alpha^2 = -(\alpha|\alpha) + |(\alpha\alpha),$$
$$\alpha \cdot \alpha = \alpha^2 = -\alpha^2 = -a^2 = -l.$$

Nunmehr ergeben sich sofort die folgenden Relationen

$$\alpha \cdot \beta + \beta \cdot \alpha = -2(\alpha|\beta) = 2c,$$
$$\alpha \cdot \beta - \beta \cdot \alpha = \quad 2|(\alpha\beta) = 2\delta.$$

Weiter bekommen wir

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^2 &= (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta) = \alpha^2 + \beta\cdot\alpha + \alpha\cdot\beta + \beta^2\\ &= \alpha^2 - 2(\alpha|\beta) + \beta^2 = -(a^2 + 2ab\cos\mathfrak{w} + b^2),\\ (\alpha-\beta)^2 &= (\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta\cdot\alpha - \alpha\cdot\beta + \beta^2\\ &= \alpha^2 + 2(\alpha|\beta) + \beta^2 = -(a^2 - 2ab\cos\mathfrak{w} + b^2),\end{aligned}$$
$$(\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2 = 2(\alpha^2+\beta^2) = -2(a^2+b^2),$$
$$(\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2 = -4(\alpha|\beta) = -4ab\cos\mathfrak{w}.$$

§ 3. **Das mittlere Produkt aus drei beliebigen Strecken.**

Weil das Assoziativitätsgesetz gilt, so erhalten wir für das mittlere Produkt aus den drei beliebigen Strecken α, β und γ

$$\begin{aligned}\alpha\cdot\beta\cdot\gamma &= (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma = [-(\alpha|\beta) + |(\alpha\beta)]\cdot\gamma\\ &= -(\alpha|\beta)\cdot\gamma + |(\alpha\beta)\cdot\gamma = -(\alpha|\beta)\gamma - (\alpha\beta\gamma) + |[|(\alpha\beta)\gamma]\\ &= -(\alpha\beta\gamma) - (\alpha|\beta)\gamma + [(\alpha\beta)|\gamma]\\ &= -(\alpha\beta\gamma) - (\alpha|\beta)\gamma + (\alpha|\gamma)\beta - (\beta|\gamma)\alpha,\end{aligned}$$
$$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma = -\alpha\beta\gamma - (\beta|\gamma)\alpha + (\gamma|\alpha)\beta - (\alpha|\beta)\gamma, \tag{1}$$

und wenn wir

$$-\alpha\beta\gamma = c, \quad -[(\beta|\gamma)\alpha - (\gamma|\alpha)\beta + (\alpha|\beta)\gamma] = \delta = d\varepsilon$$

setzen, so ergiebt sich

$$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma = c + \delta = c + d\varepsilon = c + d_1\varepsilon_1 + d_2\varepsilon_2 + d_3\varepsilon_3,$$

was zeigt, dafs im allgemeinen auch das mittlere Produkt aus drei Strecken gleich der Summe aus einer Zahl und einer Strecke ist.

Setzen wir

$$\alpha = \sum_{k=1}^{k=3} a_k \varepsilon_k, \quad \beta = \sum_{k=1}^{k=3} b_k \varepsilon_k, \quad \gamma = \sum_{k=1}^{k=3} c_k \varepsilon_k,$$

so bekommen wir

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = [(a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_3) \cdot (b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + b_3 \varepsilon_3)] \cdot (c_1 \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2 + c_3 \varepsilon_3),$$

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{aligned} &+ \{(a_3 b_1 - a_1 b_3) c_3 + (a_2 b_1 - a_1 b_2) c_2 \\ &\qquad - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_1 \} \varepsilon_1 \\ &+ \{(a_1 b_2 - a_2 b_1) c_1 + (a_3 b_2 - a_2 b_3) c_3 \\ &\qquad - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_2 \} \varepsilon_2 \\ &+ \{(a_2 b_3 - a_3 b_2) c_2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) c_1 \\ &\qquad - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_3 \} \varepsilon_3 . \end{aligned}$$

Sind in einem dreifaktorigen Produkte zwei Faktoren einander gleich, so gelangen wir, die (1) beachtend, zu den Ergebnissen

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \alpha \cdot \gamma &= -(\alpha|\gamma)\alpha + (\gamma|\alpha)\alpha - (\alpha|\alpha)\gamma, \\ \alpha \cdot \alpha \cdot \gamma &= -\alpha^2 \gamma = -a^2 \gamma, \\ \alpha \cdot \beta \cdot \alpha &= -(\beta|\alpha)\alpha + (\alpha|\alpha)\beta - (\alpha|\beta)\alpha, \\ \alpha \cdot \beta \cdot \alpha &= \quad \alpha^2 \beta - 2(\alpha|\beta)\alpha. \end{aligned}$$

Für das mittlere Produkt aus drei gleichen Faktoren (α) ergiebt sich

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha &= -(\alpha|\alpha)\alpha + (\alpha|\alpha)\alpha - (\alpha|\alpha)\alpha, \\ \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha &= -\alpha^2 \alpha = -a^2 \alpha. \end{aligned}$$

Ist $\alpha\beta\gamma = 0$, d. h. die Zahl des mittleren Produktes aus α, β und γ gleich Null, dann sind die Strecken α, β und γ komplanar. Sind umgekehrt die Faktoren eines dreifaktorigen mittleren Streckenproduktes einer Ebene parallel, so verschwindet die Zahl dieses Produktes.

Wir erkennen unmittelbar, dafs das mittlere Produkt aus beliebig vielen Strecken gleich der Summe aus einer Zahl und einer Strecke ist. Die Auswertung solcher Produkte bietet keine Schwierigkeiten.

§ 4. Der Quotient aus zwei Strecken.

Es seien β_1 und α_1 die Einheitsstrecken von β und α, so dafs $\beta = b\beta_1$, $\alpha = a\alpha_1$ ist, und denken wir uns, dafs diese vier Strecken ein gemeinsames Anfangselement besitzen.

Zunächst können wir setzen, indem β_1 durch Drehung von α_1 um ε als Axe durch den Winkel $\mathfrak{w}$ entsteht,

$$\begin{aligned} \beta_1 = i^n \alpha_1 = \varepsilon^{\frac{2\mathfrak{w}}{\pi}} \alpha_1 &= \alpha_1 \cos \mathfrak{w} + |(\varepsilon \alpha_1) \sin \mathfrak{w}, \\ &= \cos \mathfrak{w} \alpha_1 + \sin \mathfrak{w} \gamma_1, \end{aligned}$$

mit $|(\varepsilon\alpha_1) = \gamma_1$, woraus folgt

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = i^n = \varepsilon^{\frac{2\mathfrak{w}}{\pi}} = \cos\mathfrak{w} + \sin\mathfrak{w}\frac{\gamma_1}{\alpha_1},$$

aber es ist

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1} = i^1 = \varepsilon^{\frac{\pi}{\pi}} = \varepsilon^1 = \varepsilon,$$

mithin erhalten wir

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \cos\mathfrak{w} + \sin\mathfrak{w}\varepsilon = (\alpha_1|\beta_1) + |(\alpha_1\beta_1) = -\beta_1\cdot\alpha_1.$$

Der Quotient aus zwei Strecken von den Längen Eins ist gleich dem negativen Werte des mittleren Produktes aus seinem Zähler und Nenner, gleich der Summe aus einer Zahl und einer zu der durch seine Glieder bestimmten Ebene senkrechten Strecke.

$$\varepsilon^{\frac{2\mathfrak{w}}{\pi}} = \cos\mathfrak{w} + \sin\mathfrak{w}\varepsilon$$

nennt Hamilton, der Begründer der Quaternionentheorie, den Dreher, Wender oder Versor.

Zufolge der Formel

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = -\beta_1\cdot\alpha_1$$

ergiebt sich für die Quotienten aus den relativen Einheiten des Systemes

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\varepsilon_2\cdot\varepsilon_1 = -|(\varepsilon_2\varepsilon_1) = \varepsilon_3, \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = -\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2 = -|(\varepsilon_1\varepsilon_2) = -\varepsilon_3$$

und so fort.

Nunmehr erhalten wir für den Quotienten aus den Strecken β und α

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b\beta_1}{a\alpha_1} = \frac{b}{a}\frac{\beta_1}{\alpha_1},$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}\varepsilon^{\frac{2\mathfrak{w}}{\pi}} = \frac{b}{a}(\cos\mathfrak{w} + \sin\mathfrak{w}\varepsilon).$$

Nennen wir $\frac{b}{a}$ die Länge des Quotienten, so ist derselbe das Produkt aus seiner Länge und dem Schwenkungsfaktor.

Aber es ist, mit

$$\frac{b}{a}\cos\mathfrak{w} = c, \quad \frac{b}{a}\sin\mathfrak{w}\varepsilon = \delta = d\varepsilon,$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = c + \delta = c + d\varepsilon = c + d_1\varepsilon_1 + d_2\varepsilon_2 + d_3\varepsilon_3,$$

wodurch auch der Quotient aus zwei beliebigen Strecken als die Summe einer Zahl und einer Strecke, ferner als eine Vielfachensumme

aus der absoluten Einheit und den drei relativen Einheiten des Systems erscheint.

Beachten wir, dafs

$$\frac{b}{a}\cos\mathfrak{w} = \frac{\alpha\,|\,\beta}{\alpha^2}, \quad \frac{b}{a}\sin\mathfrak{w}\,\varepsilon = \frac{|\,(\alpha\beta)}{\alpha^2}$$

ist, dann haben wir noch

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^2}[\alpha\,|\,\beta + |\,(\alpha\beta)] = -\frac{\beta\cdot\alpha}{\alpha^2} = \frac{\beta\cdot\alpha}{\alpha^2}.$$

Der Quotient aus zwei Strecken ist gleich dem mittleren Produkte aus Zähler und Nenner, geteilt durch das Quadrat des Nenners.

Die Länge des Quotienten ist

$$l = \frac{b}{a},$$

aber es ist

$$c = \frac{b}{a}\cos\mathfrak{w}, \quad d\varepsilon = \frac{b}{a}\sin\mathfrak{w}\,\varepsilon,$$

mithin

$$c^2 + d^2 = c^2 + \delta^2 = \frac{b^2}{a^2} = l^2,$$

folglich ist auch

$$l = \sqrt{c^2 + \delta^2} = \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{c^2 + d_1{}^2 + d_2{}^2 + d_3{}^2}.$$

Das Ergebnis für den Quotienten aus zwei beliebigen Strecken sagt uns unmittelbar, dafs

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\cdot\beta}{\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}[\alpha\,|\,\beta - |\,(\alpha\beta)]$$

$$= \frac{a}{b}(\cos\mathfrak{w} - \sin\mathfrak{w}\,\varepsilon) = \frac{a}{b}\varepsilon^{-\frac{2\mathfrak{w}}{\pi}}$$

ist. Die Drehung erfolgt jetzt im entgegengesetzten Sinne durch einen gleichgrofsen Winkel wie vorher, denn es ist auch noch

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \varepsilon^{-\frac{2\mathfrak{w}}{\pi}}.$$

Für die Summe und die Differenz der beiden Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\alpha}{\beta}$ ergiebt sich

$$\frac{\beta}{\alpha} \pm \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta\cdot\alpha}{\alpha^2} \pm \frac{\alpha\cdot\beta}{\beta^2} = \frac{b^2 \pm a^2}{ab}\cos\mathfrak{w} + \frac{b^2 \mp a^2}{ab}\sin\mathfrak{w}\,\varepsilon$$

$$= \frac{1}{a^2 b^2}\{(b^2 \pm a^2)(\alpha\,|\,\beta) + (b^2 \mp a^2)\,|\,(\alpha\beta)\}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2\beta^2}\{(\beta^2 \pm \alpha^2)(\alpha\,|\,\beta) + (\beta^2 \mp \alpha^2)\,|\,(\alpha\beta)\}$$

Für die Addition von Quotienten mit demselben Nenner erhalten wir

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta\cdot\alpha}{\alpha^2}+\frac{\gamma\cdot\alpha}{\alpha^2}=\frac{\beta\cdot\alpha+\gamma\cdot\alpha}{\alpha^2}=\frac{(\beta+\gamma)\cdot\alpha}{\alpha^2},$$

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}.$$

Streckenquotienten mit gleichem Nenner sind wie gewöhnliche Brüche zu addieren.

Für das mittlere Produkt aus $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\alpha}{\beta}$ ergiebt sich

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{b}{a}i^n\frac{a}{b}i^{-n}=i^0,$$

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=1.$$

§ 5. Das mittlere Produkt aus einem Streckenquotienten und seinem Nenner.

Wir fanden

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}=-\beta_1\cdot\alpha_1.$$

Werden die beiden Seiten dieser Gleichung mit α_1 multipliziert, so folgt

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}\cdot\alpha_1=-(\beta_1\cdot\alpha_1)\cdot\alpha_1=-(\beta_1\cdot\alpha_1\cdot\alpha_1)=-\beta_1\cdot(\alpha_1\cdot\alpha_1)=-\beta_1(-1),$$

mithin ist

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}\cdot\alpha_1=\beta_1.$$

Ferner haben wir

$$\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{\beta\cdot\alpha}{\alpha^2},$$

daher ist

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\alpha=-\frac{1}{a^2}(\beta\cdot\alpha\cdot\alpha)=-\frac{1}{a^2}[\beta\cdot(\alpha\cdot\alpha)]=-\frac{1}{a^2}\beta(-a^2),$$

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\alpha=\beta.$$

Wird ein Quotient aus zwei Strecken mit dem seinem Nenner gleichen Faktor multipliziert, so erscheint sein Zähler.

§ 6. Die Quaternion und ihr reziproker Wert.

Das mittlere Produkt und der Quotient aus zwei Strecken erscheinen unter den gemeinsamen Formen, wenn wir beide durch q bezeichnen,

$$q=c+\delta=c+d\varepsilon,$$

$$q=c+d_1\varepsilon_1+d_2\varepsilon_2+d_3\varepsilon_3.$$

Die letztere Form nennen wir die Normalform dieser Verknüpfungen. Für Produkt und Quotienten wählen wir mit Hamilton den gemeinsamen Namen Quaternion, weil beide sich aus vier voneinander unabhängigen Einheiten, von denen die eine die absolute Einheit ist, die drei übrigen die ursprünglichen, einen Normalverein bildenden Einheiten des Systemes sind, numerisch ableiten lassen.

Den reziproken Wert der Quaternion q bezeichnen wir mit $\frac{1}{q}$ und definieren ihn durch die Gleichung

$$\frac{1}{q} \cdot q = 1.$$

Das mittlere Produkt aus $\frac{1}{q}$ und q, wobei der Faktor q die Summe aus einer Zahl und einer Strecke ist, kann nur dann eine Zahl sein, wenn auch $\frac{1}{q}$ die Summe aus einer Zahl und einer Strecke ist.

Nun sei gegeben

$$q = a_0 + a\varepsilon_1,$$

dann wird

$$\frac{1}{q} = b_0 + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3$$

sein, wo die Koeffizienten b_0, b_1, b_2 und b_3 näher zu bestimmen sind.

Infolge der Definitionsgleichung mufs

$$(b_0 + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3) \cdot (a_0 + a\varepsilon_1) = 1$$

sein, was giebt, wenn wir die Multiplikation auf der linken Seite dieser Gleichung ausführen,

$$(a_0b_0 - ab_1) + (a_0b_1 + ab_0)\varepsilon_1 + (a_0b_2 + ab_3)\varepsilon_2 + (a_0b_3 - ab_2)\varepsilon_3 = 1,$$

welche Gleichung nur dann existieren kann, wenn

$$a_0b_0 - ab_1 = 1, \quad a_0b_1 + ab_0 = 0, \quad a_0b_2 + ab_3 = 0, \quad a_0b_3 - ab_2 = 0$$

ist, woraus

$$b_0 = \frac{a_0}{a_0^2 + a^2}, \quad b_1 = -\frac{a}{a_0^2 + a^2}, \quad b_2 = b_3 = 0$$

folgt, so dafs

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{a_0^2 + a^2}(a_0 - a\varepsilon_1) = \frac{1}{l^2}(a_0 - a\varepsilon_1)$$

ist.

Der reziproke Wert einer Quaternion ist wieder eine Quaternion, sie ist gleich der durch das Längenquadrat der ersten dividierten Quaternion, welche mit der ersten gleiche Zahl und entgegengesetzt gleiche Strecke besitzt.

Für die Länge der Quaternion q besteht die Gleichung

$$l^2 = a_0^2 + a^2.$$

Setzen wir

$$a_0 = l \cos \mathfrak{w},$$

dann folgt hieraus

$$a = l \sin \mathfrak{w},$$

womit sich ergiebt

$$q = l(\cos \mathfrak{w} + \sin \mathfrak{w}\,\varepsilon_1),$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{l^2}(\cos \mathfrak{w} - \sin \mathfrak{w}\,\varepsilon_1).$$

Ist insbesondere $l = 1$, q eine quaterne Einheit, dann haben wir

$$q = a_0 + a\varepsilon_1 = \cos \mathfrak{w} + \sin \mathfrak{w}\,\varepsilon_1,$$

$$\frac{1}{q} = a_0 - a\varepsilon_1 = \cos \mathfrak{w} - \sin \mathfrak{w}\,\varepsilon_1 = q^{-1}.$$

Eine Quaternion ist im allgemeinen die Summe aus einer Zahl und einer Strecke, ist die Strecke gleich Null, dann ist die Quaternion äquivalent einer Zahl, ist die Zahl gleich Null, so ist sie einer Strecke gleich.

Nehmen wir $a_0 = 0$, $a\varepsilon_1 = \alpha$, dann erhalten wir

$$q = \alpha, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{a^2}\alpha = \alpha^{-1}.$$

Der reziproke Wert einer Strecke ist gleich der durch das Quadrat ihrer Länge dividierten, ihr entgegengesetzt gleichen Strecke.

Besteht die Quaternion aus der Strecke ε_k von der Länge Eins, dann resultiert aus dem vorstehenden Satze

$$q = \varepsilon_k, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{\varepsilon_k} = -\varepsilon_k = \varepsilon_k^{-1},$$

woraus mit $k = 1, 2, 3$ die entsprechenden Relationen für die relativen Einheiten des Systemes sich ergeben.

Wir haben

$$\frac{1}{q} \cdot q = \frac{a_0 - a\varepsilon_1}{a_0^2 + a^2} \cdot (a_0 + a\varepsilon_1) = \frac{(a_0 - a\varepsilon_1) \cdot (a_0 + a\varepsilon_1)}{a_0^2 + a^2}$$

$$= \frac{a_0^2 - aa_0\varepsilon_1 + aa_0\varepsilon_1 + a^2}{a_0^2 + a^2} = \frac{a_0^2 + a^2}{a_0^2 + a^2} = 1,$$

$$q \cdot \frac{1}{q} = (a_0 + a\varepsilon_1) \cdot \frac{a_0 - a\varepsilon_1}{a_0^2 + a^2} = 1,$$

daher besteht die Beziehung

$$q \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{q} \cdot q = 1.$$

„Das mittlere Produkt aus einer Quaternion und ihrer reziproken Quaternion ist vollkommen kommutativ, es ändert seinen Wert nicht, wenn seine Faktoren miteinander vertauscht werden.“

Sei

$$q = \frac{\beta}{\alpha} = \beta \cdot \alpha^{-1},$$

dann ist

$$q \cdot \alpha = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha = \beta, \quad q \cdot \frac{\alpha}{\beta} = 1,$$

folglich

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{\beta}$$

und

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

§ 7. Konjugierte Quaternionen und die Länge eines Produktes von Quaternionen.

Ist $q = (c + \delta)$ eine Quaternion, dann heifst $q_K = (c - \delta)$ die zu jener konjugierte Quaternion.

Für die mittleren Produkte aus zwei solchen Quaternionen ergiebt sich

$$\begin{aligned}(c + \delta) \cdot (c - \delta) &= c^2 + c\delta - c\delta + \delta^2 - |(\delta\delta) \\ &= c^2 + \delta^2 = l^2, \\ (c - \delta) \cdot (c + \delta) &= c^2 - c\delta + c\delta + \delta^2 - |(\delta\delta) \\ &= c^2 + \delta^2 = l^2,\end{aligned}$$

woraus hervorgeht, dafs

$$q \cdot q_K = q_K \cdot q$$

ist.

Das mittlere Produkt aus zwei konjugierten Quaternionen ist gleich dem Quadrate der Länge einer jeden. — Das mittlere Produkt aus zwei konjugierten Quaterionen ist vollkommen kommutativ.

Wenn $q = (c + \delta)$, $q' = (c' + \delta')$ ist, dann ergiebt sich für die Produkte $q \cdot q'$ und $q'_K \cdot q_K$

$$\begin{aligned}q \cdot q' = (c + \delta) \cdot (c' + \delta') &= \{cc' - \delta | \delta'\} + \{c'\delta + c\delta' + |(\delta\delta')\} \\ &= m + \nu, \\ q'_K \cdot q_K = (c' - \delta') \cdot (c - \delta) &= \{cc' - \delta | \delta'\} - \{c'\delta + c\delta' + |(\delta\delta')\} \\ &= m - \nu.\end{aligned}$$

In entsprechender Weise finden wir

$$\begin{aligned}q \cdot q' \cdot q'' \cdots q^{(n)} &= m + \nu, \\ q_K^{(n)} \cdot q_K^{(n-1)} \cdots q'_K q_K &= m - \nu.\end{aligned}$$

Das mittlere Produkt aus beliebig vielen Quaternionen

ist konjugiert dem umgekehrt geordneten Produkte der konjugierten Quaternionen.

Wenn

$$q \cdot q' = m + \nu$$

ist, dann ist

$$(q \cdot q')_K = m - \nu,$$

folglich ist, weil auch die Relation besteht

$$q'_K \cdot q_K = m - \nu,$$
$$(q \cdot q')_K = q'_K \cdot q_K.$$

Der konjugierte Wert des mittleren Produktes aus zwei Quaternionen ist äquivalent dem umgekehrt geordneten mittleren Produkte der konjugierten Quaternionen.

Die Längen der Quaternionen $(c + \delta)$ und $(c - \delta)$ sind einander gleich, es ist

$$l = \sqrt{c^2 - \delta^2} = \sqrt{c^2 + \delta^2} = \sqrt{(c + \delta) \cdot (c - \delta)}.$$

Dadurch können wir die Länge des mittleren Produktes aus beliebig vielen Quaternionen in sehr einfacher Weise entwickeln.

Sei gegeben

$$q \cdot q' = (c + \delta) \cdot (c' + \delta') = m + \nu,$$

dann haben wir für die Länge dieses Produktes die Relation

$$l^2 = (m + \nu) \cdot (m - \nu) = (c + \delta) \cdot (c' + \delta') \cdot (c' - \delta') \cdot (c - \delta)$$
$$= (c + \delta) \cdot (c'^2 - \delta'^2) \cdot (c - \delta),$$

aber $(c'^2 - \delta'^2)$ ist eine Zahl, folglich dürfen wir schreiben

$$l^2 = (c + \delta) \cdot (c - \delta) \cdot (c'^2 - \delta'^2)$$
$$= (c^2 - \delta^2)(c'^2 - \delta'^2),$$

und mithin ergiebt sich

$$l = \sqrt{c^2 + \delta^2}\sqrt{c'^2 + \delta'^2}.$$

Dieses Verfahren können wir auf beliebig viele Faktoren ausdehnen, wodurch wir zu dem Satze gelangen:

Die Länge des mittleren Produktes von beliebig vielen Quaternionen ist gleich dem Produkte aus den Längen seiner Faktoren.

§ 8. Summation von Quaternionen.

Sind gegeben

$$q = c + d\varepsilon, \quad q' = c' + d'\varepsilon',$$

dann haben wir

$$q \pm q' = c + d\varepsilon \pm (c' + d'\varepsilon')$$
$$= (c \pm c') + (d\varepsilon \pm d'\varepsilon') = c_1 + \delta_1,$$

mithin

$$q^{(0)} + q' + q'' + \cdots q^{(n)} = c_n + \delta_n.$$

Die Summation von Quaternionen führt wieder zu einer Quaternion, die Zahl der letzteren ist die Summe der Zahlen der Posten, ihre Strecke die Summe der Strecken der Posten. Sind die Stellungsstrecken $\varepsilon^{(0)}, \varepsilon', \ldots \varepsilon^{(n)}$ einander gleich, so ist die Stellungsstrecke der resultierenden Quaternion parallel den Stellungsstrecken der Posten.

Wir erhalten

$$q + q_K = c + \delta + c - \delta = 2c,$$
$$q - q_K = c + \delta - c + \delta = 2\delta.$$

Die Summe aus einer Quaternion und ihrer konjugierten ist gleich der zweifachen Zahl einer jeden, ihre Differenz ist gleich der doppelten Strecke der ersteren.

§ 9. Die Vertauschbarkeit der Faktoren eines mittleren Quaternionenproduktes.

Wir erhalten

$$q \cdot q' = (c + \delta) \cdot (c' + \delta')$$
$$= \{cc' - \delta \,|\, \delta'\} + \{c'\delta + c\delta' + |(\delta\delta')\} = m + \nu,$$
$$q' \cdot q = (c' + \delta') \cdot (c + \delta)$$
$$= \{cc' - \delta \,|\, \delta'\} + \{c'\delta + c\delta' - |(\delta\delta')\} = m + \nu'.$$

Die Faktoren des mittleren Produktes aus zwei Quaternionen sind nicht vertauschbar, die Vertauschung ändert nicht die Zahl, wohl aber die Strecke des Ergebnisses.

Setzen wir

$$q' \cdot q'' = q''',$$

dann ist

$$(q' \cdot q'')_K = q''_K \cdot q'_K = q'''_K,$$

folglich bekommen wir

$$(q' \cdot q'') \cdot (q' \cdot q'')_K = (q' \cdot q'') \cdot q''_K \cdot q'_K = q''' \cdot q'''_K = l'''^2.$$

§ 10. Mittlere Produkte aus quaternen Einheiten.

Sei

$$q = \cos \mathfrak{w} + \sin \mathfrak{w}\varepsilon, \quad q' = \cos \mathfrak{w}' + \sin \mathfrak{w}'\varepsilon', \ldots$$

Zunächst erhalten wir für das mittlere Produkt aus zwei quaternen Einheiten

$$\begin{aligned} q \cdot q' &= (\cos \mathfrak{w} + \sin \mathfrak{w}\varepsilon) \cdot (\cos \mathfrak{w}' + \sin \mathfrak{w}'\varepsilon') \\ &= \cos(\mathfrak{w} + \mathfrak{w}') + \sin \mathfrak{w} \cos \mathfrak{w}'\varepsilon + \cos \mathfrak{w} \sin \mathfrak{w}'\varepsilon' \\ &\qquad + \sin \mathfrak{w} \sin \mathfrak{w}' | (\varepsilon\varepsilon'). \end{aligned}$$

Sind die Stellungsstrecken ε und ε' gleichartig, dann ist $\varepsilon' = \varepsilon$ und es ergiebt sich

$$q \cdot q' = \cos(\mathfrak{w} + \mathfrak{w}') + \sin(\mathfrak{w} + \mathfrak{w}')\varepsilon.$$

Mit Rücksicht darauf, dafs $q \cdot q' \cdot q'' = (q \cdot q') \cdot q''$ ist, bekommen wir, bei gleichstimmigen quaternen Einheiten,

$$\begin{aligned} q \cdot q' \cdot q'' \cdots q^{(n)} &= \cos(\mathfrak{w} + \mathfrak{w}' + \mathfrak{w}'' + \cdots + \mathfrak{w}^{(n)}) \\ &\quad + \sin(\mathfrak{w} + \mathfrak{w}' + \mathfrak{w}'' + \cdots + \mathfrak{w}^{(n)})\varepsilon. \end{aligned}$$

Multiplikation gleichstimmiger quaterner Einheiten ist Addition ihrer Winkel.

Dieser Satz läfst sich auch in einfacherer Weise ableiten, denn wir haben noch

$$q \cdot q' \cdot q'' \cdots q^{(n)} = \varepsilon^{m} \cdot \varepsilon^{m'} \cdot \varepsilon^{m''} + \cdots = \varepsilon^{m + m' + m'' + \cdots},$$

$$q \cdot q' \cdot q'' \cdots q^{(n)} = \varepsilon^{\frac{2}{\pi}(\mathfrak{w} + \mathfrak{w}' + \mathfrak{w}'' + \cdots + \mathfrak{w}^{(n)})}$$

folglich

$$\begin{aligned} q \cdot q' \cdot q'' \cdots q^{(n)} &= \cos(\mathfrak{w} + \mathfrak{w}' + \mathfrak{w}'' + \cdots + \mathfrak{w}^{(n)}) \\ &\quad + \sin(\mathfrak{w} + \mathfrak{w}' + \mathfrak{w}'' + \cdots + \mathfrak{w}^{(n)})\varepsilon. \end{aligned}$$

Sind die quaternen Einheiten einander gleich, ist

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}' = \mathfrak{w}'' = \cdots = \mathfrak{w}_n,$$

dann ergiebt sich

$$q' \cdot q'' \cdots q^{(n)} = q^n = \varepsilon^{\frac{2n\mathfrak{w}}{\pi}} = \cos n\mathfrak{w} + \sin n\mathfrak{w}\varepsilon.$$

Ist q eine quaterne Einheit, dann bestehen die Relationen

$$q = a_0 + a\varepsilon, \quad \frac{1}{q} = a_0 - a\varepsilon = q^{-1},$$

wodurch wir erhalten

$$q^2 = (a_0 + a\varepsilon)^2 = (a_0^2 - a^2) + 2a_0 a\varepsilon,$$
$$q^{-2} = (a_0^2 - a^2) - 2a_0 a\varepsilon,$$
$$\frac{1}{q^2} = (a_0 - a\varepsilon)^2 = (a_0^2 - a^2) - 2a_0 a\varepsilon = q^{-2}.$$

In entsprechender Weise finden wir

$$\frac{1}{q^3} = a_0(a_0^2 - 3a^2) - a(3a_0^2 - a)\varepsilon = q^{-3},$$

und so fort, so dafs die Relation

$$\frac{1}{q^n} = q^{-n}$$

für quaterne Einheiten besteht, wenn n eine positive ganze Zahl ist.

Verstehen wir jetzt unter n irgend eine reelle, ganze, gebrochene, positive oder negative Zahl, setzen wir $n = \pm \frac{r}{s}$, dann ist auch

$$q^{\pm\frac{r}{s}} = \cos\left(\pm\frac{r}{s}\mathfrak{w}\right) + \sin\left(\pm\frac{r}{s}\mathfrak{w}\right)\varepsilon,$$

aber mit einer Beschränkung, denn es ist mit

$$q = \cos 0 + \sin 0 \cdot \varepsilon = \cos 2\pi + \sin 2\pi \cdot \varepsilon = 1,$$

die Quadratwurzel aus dieser Einheit

$$q^{\frac{1}{2}} = \cos 0 + \sin 0 \cdot \varepsilon = 1, \quad \text{und} \quad q^{\frac{1}{2}} = \cos\pi + \sin\pi \cdot \varepsilon = -1,$$

ferner erhalten wir in den Fällen

$$q = \cos\pi + \sin\pi \cdot \varepsilon = 1, \quad q = \cos(-\pi) + \sin(-\pi)\varepsilon = -1$$

für die Quadratwurzel aus diesen Einheiten

$$q^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{1}{2}\pi + \sin\frac{1}{2}\pi \cdot \varepsilon = \varepsilon,$$
$$q^{\frac{1}{2}} = \cos\left(-\frac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right)\varepsilon = -\varepsilon,$$

wodurch sich eine Zweideutigkeit herausstellt, was unstatthaft ist.

Deshalb müssen wir für die Potenzierung mit beliebigem reellen Exponenten festhalten, dafs der Winkel der Quaternion innerhalb der Grenzen einer ganzen Umrollung bleibe, z. B. zwischen π und $-\pi$ liege.

Eine quaterne Einheit, deren Winkel zwischen π und $-\pi$ liegt, potenzieren wir mit einer reellen Zahl, wenn wir ihren Winkel mit dieser Zahl multiplizieren.

§ 11. Quotienten aus Quaternionen.

Weil das mittlere Produkt und der Quotient aus zwei Strecken Quaternionen sind, setzen wir fest, dafs auch der Quotient aus zwei beliebigen Quaternionen eine Quaternion sei, dafs

$$\frac{q''}{q'} = q''',$$

woraus naturgemäfs folgt

$$q'' = q''' \cdot q'.$$

Weil das mittlere Produkt aus zwei Quaternionen wieder eine Quaternion ist, weil

$$q''' \cdot q' = q'' \tag{1}$$

ist, so ist

$$q''' = \frac{q''}{q'},$$

womit ebenfalls der Quotient aus zwei Quaternionen definiert ist.

Aus der Gleichung (1) folgt

$$q''' \cdot q' \cdot q'_K = q'' \cdot q'_K$$

$$q''' \cdot l'^2 = q'' \cdot q'_K, \quad \frac{q''}{q'} l'^2 = q'' \cdot q'_K,$$

mithin ist

$$\frac{q''}{q'} = \frac{q'' \cdot q'_K}{l'^2}. \tag{2}$$

Weiter haben wir, wenn wir $q' = a_0' + a'\varepsilon'$ setzen,

$$\frac{1}{q'} = \frac{a_0' - a'\varepsilon'}{a_0'^2 + a'^2} = \frac{q'_K}{l'^2},$$

und wenn wir diese Relation mit q'' multiplizieren, so folgt

$$q'' \cdot \frac{1}{q'} = \frac{q'' \cdot q'_K}{l'^2}. \tag{3}$$

Nun resultiert aus den Gleichungen (2) und (3)

$$\frac{q''}{q'} = q'' \cdot \frac{1}{q'}. \tag{4}$$

Für das mittlere Produkt aus einer Quaternion und einem Quaternionenquotienten erhalten wir

$$q' \cdot \frac{q''}{q'''} = q' \cdot \frac{q'' \cdot q'''_K}{l'''^2} = \frac{q' \cdot q'' \cdot q'''_K}{l'''^2} = \frac{q' \cdot q''}{q'''}. \tag{5}$$

Für die Division eines Quaternionenquotienten durch eine Quaternion ergiebt sich

$$\frac{\left(\frac{q'}{q''}\right)}{q'''} = \frac{\frac{q' \cdot q''_K}{l''^2}}{q'''} = \frac{q' \cdot q''_K}{l''^2} \cdot \frac{1}{q'''} = \frac{q' \cdot q''_K \cdot q'''_K}{l''^2 l'''^2}$$

$$= \frac{q' \cdot (q''' \cdot q'')_K}{l'''^2 l''^2} = \frac{q'}{q''' \cdot q''}. \qquad (6)$$

Ferner bekommen wir für die Division einer Quaternion durch einen Quaternionenquotienten

$$\frac{q'}{\left(\frac{q''}{q'''}\right)} = \frac{q' l'''^2}{q'' \cdot q'''_K} = \frac{q'(q'' \cdot q'''_K)_K}{l''^2} = \frac{q' \cdot (q'''_K)_K \cdot q''_K}{l''^2}$$

$$= \frac{q' \cdot q''' \cdot q''_K}{l''^2} = \frac{q' \cdot q'''}{q''}. \qquad (7)$$

Noch haben wir

$$\frac{q'}{q''} \cdot \frac{q''}{q'''} = q' \cdot \frac{1}{q''} \cdot q'' \cdot \frac{1}{q'''} = q' \cdot \frac{1}{q'''} = \frac{q'}{q'''},$$

$$\frac{q'}{q''} \cdot \frac{q''}{q'''} \cdot \frac{q'''}{q'} = \frac{q'}{q'''} \cdot \frac{q'''}{q'} = q' \cdot \frac{1}{q'''} \cdot q''' \cdot \frac{1}{q'} = q' \cdot \frac{1}{q'} = 1,$$

und es ist stets

$$q' \cdot \frac{q''}{q'} \gtrless q'', \quad \frac{q' \cdot q''}{q'} \gtrless q'', \quad \frac{q'}{\left(\frac{q''}{q'''}\right)} \gtrless \frac{q'}{q''} \cdot q'''.$$

§ 12. Lösung von Quaternionengleichungen.

1) Seien α, β und γ drei Strecken, für welche die Gleichungen bestehen

$$\alpha|\beta = 0, \quad \alpha|\gamma = m, \quad \alpha\beta\gamma = 0,$$

und es sei eine Gleichung aufzustellen, welche diesen drei Bedingungen genügt.

Weil die Relation besteht

$$(\beta\gamma)|\alpha = (\alpha|\beta)\gamma - (\gamma|\alpha)\beta,$$

so ist

$$(\beta\gamma)|\alpha = - m\beta,$$

und das ist die gesuchte Gleichung. Denn multiplizieren wir die aus den beiden vorhergehenden Gleichungen resultierende Gleichung

$$m\beta = (\gamma|\alpha)\beta - (\alpha|\beta)\gamma$$

mit $\gamma\alpha$, so folgt

$$m\alpha\beta\gamma = (\gamma|\alpha)\alpha\beta\gamma,$$

welche Gleichung mit $\alpha\beta\gamma = 0$ befriedigt wird.

Gehen wir von der mittleren Multiplikation aus, dann haben wir, weil $\alpha\beta\gamma = 0$ sein muſs,

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = -(\beta|\gamma)\alpha + (\gamma|\alpha)\beta - (\alpha|\beta)\gamma.$$

Wegen der beiden ersten Bedingungen mufs nun sein

$$(\gamma|\alpha)\beta - (\alpha|\beta)\gamma = m\beta,$$

woraus folgt

$$(\beta\gamma)|\alpha = -m\beta.$$

Multiplizieren wir dieses Ergebnis mit $|\beta$, so wird

$$(\beta\gamma)|(\alpha\beta) = \begin{vmatrix} \beta|\alpha & \gamma|\alpha \\ \beta|\beta & \gamma|\beta \end{vmatrix} = (\alpha|\beta)(\beta|\gamma) - (\gamma|\alpha)\beta^2 = -m\beta^2,$$

und weil $\alpha|\beta = 0$ ist, so ist in der That

$$\gamma|\alpha = m,$$

wie dem sein mufs.

2) Gegeben seien die drei Gleichungen

$$|[\alpha|(\beta\gamma)] = m\gamma, \quad |(\beta\gamma)\cdot|(\delta\varepsilon) = \sigma, \quad \delta\varepsilon\gamma \doteq 0,$$

und es sei eine Gleichung zu formieren, welche diesen drei Bedingungen genügt.

Zunächst ist

$$\begin{aligned} |(\beta\gamma)\cdot|(\delta\varepsilon) &= -|(\beta\gamma)|(\delta\varepsilon) + [|(\beta\gamma)|(\delta\varepsilon)] \\ &= -(\beta\gamma)|(\delta\varepsilon) + (\delta\varepsilon\beta)\gamma - (\delta\varepsilon\gamma)\beta, \end{aligned}$$

so dafs wegen der zweiten und dritten Bedingung

$$|(\beta\gamma)\cdot|(\delta\varepsilon) = (\delta\varepsilon\beta)\gamma$$

ist. — Weiter haben wir

$$\begin{aligned} &\alpha\cdot|(\beta\gamma)\cdot|(\delta\varepsilon) = (\delta\varepsilon\beta)\alpha\cdot\gamma, \\ &\{-\alpha\beta\gamma + |[\alpha|(\beta\gamma)]\}\cdot|(\delta\varepsilon) = (\delta\varepsilon\beta)\,\alpha\cdot\gamma, \\ &\{-\alpha\beta\gamma + m\gamma\}\cdot|(\delta\varepsilon) = (\delta\varepsilon\beta)\alpha\cdot\gamma, \\ &-|(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon) + m\gamma\cdot|(\delta\varepsilon) = (\delta\varepsilon\beta)\alpha\cdot\gamma, \end{aligned}$$

wegen der dritten Bedingung

$$-m|(\delta\varepsilon)\cdot\gamma = (\delta\varepsilon\beta)\alpha\cdot\gamma\cdot$$

Nun giebt die mittlere Multiplikation der Seiten dieser Gleichung mit $\frac{1}{\gamma}$

$$-m|(\delta\varepsilon)\cdot\gamma\cdot\frac{1}{\gamma} = (\delta\varepsilon\beta)\alpha\cdot\gamma\cdot\frac{1}{\gamma},$$

mithin ist

$$-m|(\delta\varepsilon) = (\delta\varepsilon\beta)\alpha$$

oder

$$m|(\delta\varepsilon) = (\beta\varepsilon\delta)\alpha$$

die gewünschte Lösung.

3) Sei die Streckengleichung

$$(\alpha \cdot \varrho \cdot \beta)_\sigma = \gamma,$$

was bedeutet, dafs die Strecke des mittleren Produktes $\alpha \cdot \varrho \cdot \beta$ gegeben sei, für ϱ aufzulösen.

In diesem Falle haben wir

$$\alpha \cdot \varrho \cdot \beta = -\alpha\varrho\beta + (\alpha|\beta)\varrho - (\beta|\varrho)\alpha - (\alpha|\varrho)\beta,$$

mithin mufs sein

$$\gamma = (\alpha|\beta)\varrho - (\beta|\varrho)\alpha - (\alpha|\varrho)\beta.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$(\alpha|\beta)\varrho = (\beta|\varrho)\alpha + (\alpha|\varrho)\beta + \gamma, \qquad (1)$$

$$(\alpha\varrho)|\beta = (\alpha|\varrho)\beta + \gamma, \qquad (2)$$

$$(\beta\varrho)|\alpha = (\beta|\varrho)\alpha + \gamma. \qquad (3)$$

Jetzt giebt die Multiplikation der (2) mit $|\beta$, der (3) mit $|\alpha$

$$0 = (\alpha|\varrho)\beta^2 + \beta|\gamma, \quad 0 = (\beta|\varrho)\alpha^2 + \gamma|\alpha,$$

folglich ist

$$\alpha|\varrho = -\frac{\beta|\gamma}{\beta^2}, \quad \beta|\varrho = -\frac{\gamma|\alpha}{\beta^2},$$

und wenn wir diese Werte in die (1) substituieren, so finden wir

$$\varrho = -\frac{1}{\alpha|\beta}\left\{\frac{\gamma|\alpha}{\alpha^2}\alpha + \frac{\beta|\gamma}{\beta^2}\beta - \gamma\right\}.$$

4) Sei die Gleichung für ϱ aufzulösen

$$(\alpha \cdot \beta \cdot \varrho)_\sigma = \gamma.$$

Wir müssen haben

$$\alpha \cdot \beta \cdot \varrho = -\alpha\beta\varrho - (\alpha|\beta)\varrho + (\alpha\beta)|\varrho = -\alpha\beta\varrho + \gamma,$$

folglich

$$\gamma = -(\alpha|\beta)\varrho + (\alpha\beta)|\varrho.$$

Nun giebt die äufsere Multiplikation dieser Gleichung mit $\alpha\beta$

$$\alpha\beta\gamma = -(\alpha|\beta)\alpha\beta\varrho + (\alpha\beta)(\alpha\beta)|\varrho,$$

$$\alpha\beta\gamma = -(\alpha|\beta)\alpha\beta\varrho,$$

daher ist

$$\alpha\beta\varrho = -\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha|\beta},$$

so dafs

$$\alpha \cdot \beta \cdot \varrho = \gamma + \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha|\beta},$$

$$\varrho = \beta^{-1} \cdot \alpha^{-1}\left(\gamma + \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha|\beta}\right) = \frac{\beta \cdot \alpha}{\alpha^2\beta^2}\left(\gamma + \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha|\beta}\right),$$

$$\varrho = \frac{(\alpha\cdot\beta)_K}{\alpha^2\beta^2}\left(\gamma + \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha|\beta}\right).$$

5) Ferner sei für ϱ die Gleichung aufzulösen

$$(\beta'|\varrho)\alpha' + (\beta''|\varrho)\alpha'' + (\beta'''|\varrho)\alpha''' = \gamma.$$

Aus dieser Gleichung folgt zunächst

$$(\beta'|\varrho)(\alpha'\alpha''\alpha''') = \alpha''\alpha'''\gamma, \quad \beta'|\varrho = \alpha''\alpha'''\gamma : \alpha'\alpha''\alpha''',$$
$$(\beta''|\varrho)(\alpha'\alpha''\alpha''') = \alpha'''\alpha'\gamma, \quad \beta''|\varrho = \alpha'''\alpha'\gamma : \alpha'\alpha''\alpha''',$$
$$(\beta'''|\varrho)(\alpha'\alpha''\alpha''') = \alpha'\alpha''\gamma, \quad \beta'''|\varrho = \alpha'\alpha''\gamma : \alpha'\alpha''\alpha'''.$$

Sind α, β, γ drei nicht komplanare Strecken, dann läfst sich eine vierte Strecke des Raumes darstellen durch

$$\delta = x|(\alpha\beta) + y|(\beta\gamma) + z|(\gamma\alpha),$$

weil dann

$$\gamma|\delta = x\alpha\beta\gamma, \quad \alpha|\delta = y\alpha\beta\gamma, \quad \beta|\delta = z\alpha\beta\gamma$$

ist, so ergiebt sich die Relation

$$(\alpha\beta\gamma)\delta = (\gamma|\delta)|(\alpha\beta) + (\alpha|\delta)|(\beta\gamma) + (\beta|\delta)|(\gamma\alpha).$$

Nun folgt vermöge dieser Gleichung mit α, β, γ, δ resp. gleich β', β'', β''', ϱ, dafs

$$(\beta'\beta''\beta''')\varrho = (\beta'''|\varrho)|(\beta'\beta'') + (\beta'|\varrho)|(\beta''\beta''') + (\beta''|\varrho)|(\beta'''\beta')$$

ist, mithin ergiebt sich

$$(\alpha'\alpha''\alpha''')(\beta'\beta''\beta''')\varrho = (\alpha'\alpha''\gamma)|(\beta'\beta'') + (\alpha''\alpha'''\gamma)|(\beta''\beta''') + (\alpha'''\alpha'\gamma)|(\beta'\beta''),$$

welche Gleichung die Strecke ϱ bestimmt.

6) Sei gegeben

$$|(\varepsilon\varrho) = \gamma$$

und sei die Strecke ϱ zu ermitteln.

Wir erhalten, wenn wir diese Gleichung mit ε multiplizieren,

$$(\varepsilon\varrho)|\varepsilon = |(\gamma\varepsilon), \quad \varepsilon^2\varrho - (\varrho|\varepsilon)\varepsilon = |(\gamma\varepsilon),$$

und weil $\varrho|\varepsilon$ unbestimmt ist, so setzen wir $\varrho|\varepsilon = x$, womit sich ergiebt

$$\varrho = [x\varepsilon + |(\gamma\varepsilon)]\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Ferner haben wir

$$\varepsilon \cdot \varrho = -\varepsilon|\varrho + |(\varepsilon\varrho) = -x + \gamma,$$

$$\varrho = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} \cdot (-x + \gamma) = [x\varepsilon + \varepsilon|\gamma + |(\gamma\varepsilon)]\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot$$

7) Wir betrachten jetzt die nicht allgemeine Gleichung ersten Grades

$$\mathfrak{a} \cdot q = q \cdot \mathfrak{b}, \tag{1}$$

in welcher $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beliebige Quaternionen sind.

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\mathfrak{a}_K$, so folgt

$$\mathfrak{a}_K \cdot \mathfrak{a} \cdot q = \mathfrak{a}_K \cdot q \cdot \mathfrak{b},$$

d. i.

$$l_{\mathfrak{a}}^2 q = \mathfrak{a}_K \cdot q \cdot \mathfrak{b},$$

ferner ergiebt sich, wenn wir die (1) mit $\mathfrak{b}$ multiplizieren,

$$q \cdot \mathfrak{b}^2 = \mathfrak{a} \cdot q \cdot \mathfrak{b},$$

und die Addition der beiden letzten Gleichungen führt, wenn allgemein durch q_z und q_σ die Zahl und die Strecke der Quaternion q ausgedrückt wird, zu

$$l_{\mathfrak{a}}^2 q + q \cdot \mathfrak{b}^2 - 2\mathfrak{a}_z q \cdot \mathfrak{b} = 0,$$

oder

$$q \cdot (l_{\mathfrak{a}}^2 + \mathfrak{b}^2 - 2\mathfrak{a}_z \mathfrak{b}) = 0.$$

Daraus geht hervor, dafs es nur dann einen reellen Wert von q giebt, wenn

$$l_{\mathfrak{a}}^2 + \mathfrak{b}^2 - 2\mathfrak{a}_z \mathfrak{b} = 0 \tag{2}$$

ist.

Setzen wir

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_z + \sqrt{\mathfrak{a}_\sigma^2}\,\varepsilon', \tag{3}$$

dann haben wir

$$(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}_z)^2 = \mathfrak{a}_\sigma^2, \quad \text{oder} \quad \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{a}_z^2 - \mathfrak{a}_\sigma^2 - 2\mathfrak{a}_z \mathfrak{b} = 0,$$

oder

$$l_{\mathfrak{a}}^2 + \mathfrak{b}^2 - 2\mathfrak{a}_z \mathfrak{b} = 0,$$

folglich ist die (3) eine Lösung der (2) für $\mathfrak{b}$, wobei ε' eine Streckeneinheit bedeutet.

In ähnlicher Weise zeigt es sich, unter ε eine andere Streckeneinheit verstanden, dafs

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_z + \sqrt{\mathfrak{b}_\sigma^2}\,\varepsilon \tag{4}$$

ist.

Nach (1) mufs sein

$$l_{\mathfrak{a}} = l_{\mathfrak{b}}, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{a}_z^2 - \mathfrak{a}_\sigma^2 = \mathfrak{b}_z^2 - \mathfrak{b}_\sigma^2,$$

woraus folgt

$$\frac{1}{\mathfrak{b}_\sigma^2}\left(\frac{\mathfrak{a}_z^2}{\mathfrak{a}_\sigma^2}-1\right)=\frac{1}{\mathfrak{a}_\sigma^2}\left(\frac{\mathfrak{b}_z^2}{\mathfrak{b}_\sigma^2}-1\right). \tag{5}$$

Aber mit (2), (3) und (4) finden wir, indem

$$\mathfrak{b}=\mathfrak{b}_z+\mathfrak{b}_\sigma,\quad \mathfrak{a}=\mathfrak{a}_z+\mathfrak{a}_\sigma$$

ist,

$$\mathfrak{b}_z^2+2\mathfrak{b}_z\mathfrak{b}_\sigma-\mathfrak{b}_\sigma^2-2\mathfrak{a}_z\mathfrak{b}_z-2\mathfrak{a}_z\mathfrak{b}_\sigma+\mathfrak{a}_z^2-\mathfrak{a}_\sigma^2=0,$$
$$\mathfrak{a}_z^2+2\mathfrak{a}_z\mathfrak{a}_\sigma-\mathfrak{a}_\sigma^2-2\mathfrak{b}_z\mathfrak{a}_z-2\mathfrak{b}_z\mathfrak{a}_\sigma+\mathfrak{b}_z^2-\mathfrak{b}_\sigma^2=0,$$

und wenn wir die eine dieser Gleichungen von der anderen abziehen, so ergiebt sich

$$(\mathfrak{a}_z-\mathfrak{b}_z)(\mathfrak{a}_\sigma-\mathfrak{b}_\sigma)=0.$$

Diese Gleichung wird nur befriedigt, wenn einer der Faktoren des Produktes auf ihrer linken Seite verschwindet. Nehmen wir an, dafs

$$\mathfrak{a}_z=\mathfrak{b}_z$$

sei, dann ist auch

$$\mathfrak{a}_z^2=\mathfrak{b}_z^2,$$

welches

$$\mathfrak{a}_\sigma^2=\mathfrak{b}_\sigma^2$$

nach sich zieht. Mithin ist

$$\frac{\mathfrak{a}_z^2}{\mathfrak{a}_\sigma^2}=\frac{\mathfrak{b}_z^2}{\mathfrak{b}_\sigma^2}=a^2.$$

Setzen wir noch $q=r+\varrho$, so läfst sich die Gleichung (1) schreiben

$$(\mathfrak{a}_z+\mathfrak{a}_\sigma)\cdot(r+\varrho)=(r+\varrho)\cdot(\mathfrak{b}_z+\mathfrak{b}_\sigma),$$

oder

$$\left(\frac{\mathfrak{a}_z}{\sqrt{\mathfrak{a}_\sigma^2}}+\frac{\mathfrak{a}_\sigma}{\sqrt{\mathfrak{a}_\sigma^2}}\right)\cdot(r+\varrho)=(r+\varrho)\cdot\left(\frac{\mathfrak{b}_z}{\sqrt{\mathfrak{b}_\sigma^2}}+\frac{\mathfrak{b}_\sigma}{\sqrt{\mathfrak{b}_\sigma^2}}\right),$$

das heifst

$$(a+\varepsilon)\cdot(r+\varrho)=(r+\varrho)\cdot(a+\varepsilon').$$

Die Durchführung der Multiplikation auf beiden Seiten dieser Gleichung giebt

$$r(\varepsilon-\varepsilon')=(\varepsilon-\varepsilon')|\varrho+|[\varrho(\varepsilon+\varepsilon')],$$

welche Gleichung nur dann existieren kann, wenn

$$(\varepsilon-\varepsilon')|\varrho=0,\quad r(\varepsilon-\varepsilon')=|[\varrho(\varepsilon+\varepsilon')]$$

ist.

Die erste Bedingung sagt aus, dafs ϱ normal zu $(\varepsilon-\varepsilon')$ sein mufs, so dafs, wenn γ irgend eine mit $(\varepsilon-\varepsilon')$ ungleichartige Strecke bedeutet, die erste Bedingung durch

$$\varrho=|[\gamma(\varepsilon-\varepsilon')]$$

befriedigt wird.

Damit geht die zweite Bedingungsgleichung über in

$$r(\varepsilon - \varepsilon') = [\gamma(\varepsilon - \varepsilon')] \,|\, (\varepsilon + \varepsilon') = [\gamma \,|\, (\varepsilon + \varepsilon')](\varepsilon - \varepsilon'),$$

folglich ist

$$r = \gamma \,|\, (\varepsilon + \varepsilon').$$

Nachdem die Werte von ϱ und r bekannt geworden sind, erhalten wir

$$q = \gamma \,|\, (\varepsilon + \varepsilon') + \,|\, [\gamma(\varepsilon - \varepsilon')].$$

Nun können wir schreiben

$$q = [\varepsilon \,|\, \gamma - \,|\, (\varepsilon\gamma)] + [\gamma \,|\, \varepsilon' - \,|\, (\gamma\varepsilon')],$$

wodurch sich ergiebt

$$q = -\varepsilon \cdot \gamma - \gamma \cdot \varepsilon',$$

oder, mit $\gamma = -\gamma_1$,

$$q = \varepsilon \cdot \gamma_1 + \gamma_1 \cdot \varepsilon'.$$

Substituieren wir diesen Wert von q in die Gleichung (1), so finden wir, dafs sie dadurch befriedigt wird.

8) Zum Schlusse geben wir noch die Lösung der Gleichung zweiten Grades

$$q^2 = q \cdot \mathfrak{a} + \mathfrak{b}. \tag{1}$$

Um q zu ermitteln, setzen wir mit Hamilton

$$q = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + w + \varrho), \tag{2}$$

wobei w eine noch unbekannte Zahl und ϱ eine zu bestimmende Strecke bedeutet.

Die Substitution dieses Ausdruckes für q in die (1) liefert

$$\frac{1}{4}(\mathfrak{a} + w + \varrho)^2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + w + \varrho) \cdot \mathfrak{a} + \mathfrak{b},$$

hieraus folgt durch Lösung der Klammern und nachherige Umformung

$$(w + \varrho)^2 + \mathfrak{a} \cdot \varrho - \varrho \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2 + 4\mathfrak{b},$$

$$(w + \varrho)^2 + 2 \,|\, (\mathfrak{a}_\sigma \varrho) = (\mathfrak{a}_z + \mathfrak{a}_\sigma)^2 + 4(\mathfrak{b}_z + \mathfrak{b}_\sigma),$$

$$w^2 + 2w\varrho + \varrho^2 + 2 \,|\, (\mathfrak{a}_\sigma \varrho) = \mathfrak{a}_z^2 + \mathfrak{a}_\sigma^2 + 4\mathfrak{b}_z + 2\mathfrak{a}_z\mathfrak{a}_\sigma + 4\mathfrak{b}_\sigma.$$

Setzen wir nun

$$\mathfrak{a}_\sigma = \alpha, \quad \mathfrak{a}_z^2 + \mathfrak{a}_\sigma^2 + 4\mathfrak{b}_z = c, \quad \mathfrak{a}_z\mathfrak{a}_\sigma + 2\mathfrak{b}_\sigma = \gamma,$$

dann wird

$$w^2 + \varrho^2 + 2w\varrho + 2 \,|\, (\alpha\varrho) = c + 2\gamma,$$

also ist

$$w^2 + \varrho^2 = c, \tag{3}$$

$$w\varrho + |(\alpha\varrho) = \gamma. \tag{4}$$

Mittelst dieser beiden Bedingungsgleichungen sind nun ϱ und w zu bestimmen.

Aus (4) folgt

$$w|\varrho + (\alpha\varrho) = |\gamma,$$
$$w|(\varrho\alpha) + (\alpha\varrho)|\alpha = |(\gamma\alpha),$$
$$w|(\varrho\alpha) + \alpha^2\varrho - (\alpha|\varrho)\alpha = |(\gamma\alpha),$$

demnach ergiebt sich

$$|(\alpha\varrho) = \frac{1}{w}\{\alpha^2\varrho - (\alpha|\varrho)\alpha + |(\alpha\gamma)\}.$$

Wird die (4) mit $|\alpha$ multipliziert, so erhalten wir

$$w(\varrho|\alpha) = \gamma|\alpha, \quad \alpha|\varrho = \frac{1}{w}(\gamma|\alpha),$$

mithin bekommen wir

$$|(\alpha\varrho) = \frac{1}{w}\{\alpha^2\varrho - \frac{1}{w}(\gamma|\alpha)\alpha + |(\alpha\gamma)\}.$$

Mit diesem Werte von $|(\alpha\varrho)$ geht die (4) über in

$$w\varrho + \frac{1}{w}\{\alpha^2\varrho - \frac{1}{w}(\gamma|\alpha)\alpha + |(\alpha\gamma)\} = \gamma,$$

und aus dieser Gleichung ziehen wir

$$\varrho = \frac{w^2\gamma + w|(\gamma\alpha) + (\gamma|\alpha)\alpha}{(w^2 + \alpha^2)w}. \tag{5}$$

Ferner folgt aus (4) durch innere Quadratur

$$\{w\varrho + |(\alpha\varrho)\}^2 = \gamma^2.$$

Die Ausführung der inneren Multiplikation auf der linken Seite dieser Gleichung und die Reduktion des Ergebnisses auf Null giebt

$$(w^2 + \alpha^2)w^2\varrho^2 - \alpha^2\gamma^2 + (\alpha\gamma)^2 - w^2\gamma^2 = 0. \tag{6}$$

Aber es ist nach (3)

$$\varrho^2 = w^2 - c,$$

wodurch die Gleichung (6) übergeht in

$$(w^2 + \alpha^2)w^2(w^2 - c) - (w^2 + \alpha^2)\gamma^2 + (\alpha\gamma)^2 = 0,$$

und daraus resultiert schliefslich

$$(w^2 + \alpha^2)(w^4 - w^2c - \gamma^2) + (\alpha\gamma)^2 = 0. \tag{7}$$

Diese Gleichung (7) liefert für w sechs Werte, deren jedem eine durch die (5) gegebene Strecke ϱ entspricht, so dafs auch q sechs

Werte besitzt. Nur zwei von diesen Werten geben reelle, die übrigen vier geben komplexe Quaternionen.

Sonstige Anwendungen der mittleren Multiplikation sind nicht beigefügt, weil wir von ihr nur in der Mechanik an wenigen Stellen vorteilhaften Gebrauch zu machen vermögen.

Zu empfehlen sind die Vorlesungen über die Theorie der Quaternionen von Dr. Friedrich Gräfe (Leipzig, B. G. Teubner, 1883), durch welche der Leser bezüglich des wesentlichen Unterschiedes unserer und der früheren Entwickelung der mittleren Multiplikation leicht die Parallele zieht.

